Modelo estocástico de selección de carteras de renta fija con costes de transacción y distintas calificaciones crediticias

L. Aranburu*, **M.A. Garín and G. Pérez**

L. Aranburu* Dpto. de Economía Aplicada III
Universidad del País Vasco, Bilbao (Vizcaya), Spain
e-mail: larraitz.aranburu@ehu.es

M.A. Garín Dpto. de Economía Aplicada III
Universidad del País Vasco, Bilbao (Vizcaya), Spain
e-mail: mariaaraceli.garin@ehu.es

G. Pérez Dpto. de Matemática Aplicada, Estadística e Investigación Operativa
Universidad del País Vasco, Leioa (Vizcaya), Spain
e-mail: gloria.perez@ehu.es

Resumen

En este trabajo se desarrolla un modelo estocástico de selección de carteras de renta fija, cuyo objetivo es inmunizar la cartera frente a cambios en los tipos de interés. El modelo permite la introducción de costes de transacción, tanto fijos como variables, y contempla distintas calificaciones crediticias para los bonos del mercado. De esta forma, el tomador de decisiones encuentra la cartera óptima teniendo en cuenta el riesgo asociado a la probabilidad de quiebra o incumplimiento de la entidad emisora de cada bono así como la evolución de los tipos de interés. Se proponen distintas funciones objetivo como modelizaciones alternativas de la aversión al riesgo del tomador de decisiones. Dicho riesgo es incorporado al modelo mediante un programa estocástico de dos etapas, basado en el análisis de escenarios.

Palabras clave: probabilidad de incumplimiento, calificación crediticia, inmunización, análisis de escenarios.
Código JEL: C61

* Larraitz Aranburu Laka. Dpto. Economía Aplicada III. Fac. Económicas y Empresariares, UPV/EHU. Avd. Lehendakari Aguirre 83, 48015, Bilbao, Spain. e-mail: larraitz.aranburu@ehu.es Tel: 34-94-6017078 Fax: 34-94-6013754

1. Introducción

Bierwag y Khang (1979) probaron que la inmunización puede describirse como una estrategia de maximización a lo largo de los estados de la naturaleza, donde el objetivo del inversor es garantizar un rendimiento mínimo durante el horizonte de planificación. De acuerdo con Dantzig (1971), esta solución máxima se puede encontrar resolviendo un problema de programación lineal equivalente que depende de la hipótesis sobre la Estructura Temporal de los Tipos de Interés, en adelante ETTI.

Uno de los resultados más importantes que conciernen al desarrollo de estrategias de cartera contra el riesgo de tipo de interés es el llamado Teorema de Inmunización Global Dinámica enunciada por Khang (1983). Según esta teoría, para garantizar el valor final de la cartera al final de un periodo de tiempo, independientemente de los cambios de los tipos de interés, la estrategia óptima es aquella que iguala el horizonte de planificación a la duración de Macaulay[1] de la cartera, en cada momento. Dada la naturaleza de la duración de una cartera, esta estrategia implicaría un continuo reajuste de la misma. De cualquier forma, la optimalidad de esta estrategia está basada en algunos supuestos, entre los que se incluyen:

a. La estructura de los tipos de interés tiene cambios paralelos. Es decir, si la estructura cambia de $g(t)$ a $g^*(t, \alpha)$, entonces:

$$g^*(t, \alpha) = g(t) + \alpha \tag{2}$$

b. No hay costes de transacción. Es un supuesto muy importante ya que si hubiese costes de transacción, y éstos fuesen muy elevados, el reajuste continuo de la cartera sería inviable.

c. Los rendimientos de los bonos dependen únicamente del tipo de interés vigente, sin tener en cuenta la existencia de algún riesgo de incumplimiento.

El primero de los supuestos elude el problema del riesgo de infraestimación del comportamiento de la estructura, llamado *Riesgo de Inmunización*, ver Fong y Vasicek (1983).

Con respecto a la hipótesis de la ausencia de costes de transacción, resulta crucial en un contexto dinámico, ya que si se tienen en cuenta los costes de transacción, la

[1] La duración de Macaulay de un activo es una media ponderada de la rentabilidad del bono en cada instante, donde la ponderación se elije como las desviaciones de cada instante con respecto al inicial:

$$d_{it} = \frac{\sum_{s=1}^{i}(t_s - t_0) Cupon \cdot Precio}{\sum_{s=1}^{i} Cupon \cdot Precio} \tag{1}$$

En un bono cupón cero la duración sera exáctamente igual al vencimiento.

estrategia del reajuste continuo podría no ser óptima dados los costes tan elevados que implicaría.

Además, dado el tercer supuesto, no se conocen análisis en el contexto de bonos con distintas calificaciones crediticias y, por tanto, con riesgo de incumplimiento positivo, asociado a los bonos. Este análisis puede no resultar relevante en tiempos de bonanza, sin embargo, puede resultar crucial en situaciones de crisis financiera, en las que son al menos probables las quiebras de las entidades emisoras.

El modelo de selección descrito a continuación trata de obtener el patrón de reajuste óptimo que asegura un valor mínimo de la cartera, independientemente de los cambios en los tipos de interés. Este modelo permite la introducción de costes de transacción, tanto fijos como variables, y contempla distintas calificaciones crediticias para los bonos. De esta forma, el tomador de decisiones obtiene la cartera óptima teniendo en cuenta el riesgo asociado a la probabilidad de quiebra o incumplimiento de la entidad emisora de cada bono y el peso que él mismo atribuye a ese riesgo. El riesgo es incorporado en el modelo mediante un programa de programación estocástica basado en análisis de escenarios.

Los modelos de programación estocástica han sido propuestos y ampliamente estudiados desde los años 1950 por autores como Dantzig (1955), Beale (1955), Charnes and Cooper (1959) entre otros. Ellos propusieron una visión estocástica reemplazando la tradicional visión determinista, donde los coeficientes o parámetros inciertos son considerados como variables aleatorias cuyas conocidas o estimadas distribuciones de probabilidad son independientes de las variables de decisión. A partir de esos años, el impresionante avance y desarrollo de los métodos computacionales hace que problemas de programación matemática de grandes dimensiones sean eficientemente resueltos; ver por ejemplo los trabajos de Lustig et al. (1991), Bixby et al. (1992), Levkovitz and Mitra (1993) o Mulvey et al. (1995) entre otros. Son estos avances los que han hecho que progresivamente las técnicas propias de programación estocástica sean aplicadas a problemas financieros de la vida real.

La programación estocástica proporciona un flexible esquema de modelización, capaz de capturar aspectos de los problemas reales tales como condiciones de balance, costes de transacción, aversión al riesgo, limitaciones sobre número o grupos de activos a considerar, etc. Sin embargo, los modelos de optimización generados se vuelven intratables cuando se combinan un elevado número de variables, en particular si se trata de variables 0-1, con una explosión exponencial de escenarios. Es en este caso, cuando son necesarios tanto los procedimientos de descomposición del problema como las técnicas de reducción del número de escenarios.

El trabajo se organiza como sigue. La Sección 2 introduce el concepto de riesgo asociado a los activos de renta fija. La Sección 3 describe el modelo estático adaptativo propio de la programación determinista. A lo largo de la Sección 4 se detallan los elementos característicos del modelo estocástico, que es introducido en la Sección 5. Un caso de estudio es presentado en la Sección 6. La Sección 7 presenta una modelización de la aversión al riesgo del inversor, y finalmente, la Sección 8 concluye.

2. El riesgo asociado a la renta fija

Consideremos un inversor que desea invertir una cantidad I_0 (unidades monetarias, euros, etc.), en un mercado con n bonos cupón distintos, con distinto *riesgo de incumplimiento*. Esto se debe a que en el mundo real los activos de renta fija no son libres de algún tipo de riesgo como se supone muchas veces. El riesgo en este caso tiene que ver con la solvencia de las entidades emisoras, y por tanto, de los propios bonos. Para facilitar la notación se incluyen las siguientes definiciones:

Definición 1 *La* calificación crediticia*, comúnmente más conocida con el anglicismo* rating*, es la clasificación de una determinada persona o empresa en cuanto a su solvencia como deudora en la emisión de títulos a corto o largo plazo. Las agencias de* rating *estudian con cierta periodicidad tanto a las compañías emisoras de bonos, como la situación de las propias emisiones y pueden cambiar una clasificación cuando les parezca oportuno, para mejorarla o empeorarla.*

Si tomamos como referencia el ranking del Standard&Poors, los bonos pueden ser:

Calificación Crediticia	**Calidad del bono**
AAA	Calidad crediticia más alta
AA	Calidad crediticia superior
A	Calidad crediticia satisfactoria
BBB	Calidad crediticia adecuada
BB	Especulativo
B	Altamente especulativo
CCC	Muy altamente especulativo
CC	Extremadamente especulativo
C	Muy extremadamente especulativo
D	Incumplimiento (quiebra) del principal, el interés, o ambos

Definición 2 *El* incumplimiento*, al que en el mundo financiero se le conoce por el anglicismo* default*, es el fallo en devolver el dinero prestado cuando la fecha ha vencido, o cuando se han llevado a cabo los términos de un acuerdo.*

El riesgo de incumplimiento, medido normalmente en términos de su probabilidad, está altamente relacionado con la calificación crediticia de cada entidad, en el instante de tiempo correspondiente. Como ejemplo, se muestra a continuación una tabla que representa los riesgos de incumplimiento calculados como probabilidades medias acumuladas, en %, (S&P Credit Week, April 15, 1996):

Calificación Crediticia	**Años desde emisión**						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**7**	**10**
AAA	0.00	0.00	0.07	0.15	0.24	0.66	1.4
AA	0.00	0.02	0.12	0.25	0.43	0.89	1.29
A	0.06	0.16	0.27	0.44	0.67	1.12	2.17
BBB	0.18	0.44	0.72	1.27	1.78	2.99	4.34
BB	1.06	3.48	6.12	8.68	10.97	14.46	17.73
B	5.12	11.00	15.95	19.40	21.88	25.14	29.02
CCC	19.79	26.92	31.63	35.97	40.15	42.64	45.10

Definición 3 *La* tasa de recuperación*, a la que se referencia muchas veces como* recovery rate*, es la proporción del dinero adeudado que se compromete a pagar el emisor al comprador en caso de incumplimiento.*

A modo de ejemplo, en el trabajo de Altman & Kishore (1996), se obtienen los siguientes resultados para el periodo 1971-1995, tomando como base las distintas industrias codificadas por el código internacional SIC:

Tipo de industria	**Tasa de Recuperación (%)**
Entidades públicas	**70.5**
Derivados del petróleo	**62.7**
Casinos, hoteles, ...	**40.2**
Material de construcción	**38.8**
Telecomunicaciones	**37.1**
Instituciones financieras	**35.7**
Textil	**31.7**
Productos de madera, papel y cuero	**29.8**
Instalaciones de hospitales y enfermería	**26.5**

3. Modelo estático anticipativo

Retomemos al inversor que desea invertir la cantidad I_0 (unidades monetarias, euros, etc.), en un mercado con n bonos cupón distintos, con distinto *riesgo de incumplimiento*. Las distintas composiciones de la cartera se considerarán estrategias del inversor.

Se denota por P_i al precio de una unidad del activo i, cuando el tipo de interés vigente es r^c, y por Z_i al número de unidades de este activo que se incluyen en la cartera óptima. Por tanto, la estrategia del inversor consiste en determinar un vector, $(Z_1, \ldots, Z_n)$, que debe cumplir la condición de presupuesto, i.e.:

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i P_i = I_0 \tag{3}$$

Además, se asume, que justo después de la compra de cada activo seleccionado en la cartera, los tipos de interés pueden cambiar de su nivel actual r^c a cualquiera de los valores $r^\omega : \omega \in \Omega$ al final del periodo de planificación, donde Ω es el conjunto de posibles escenarios futuros para los tipos de interés. Así, el valor de la cartera al final del horizonte de planificación viene dado por la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i v_i^\omega \tag{4}$$

donde v_i^ω denota el valor final de una inversión de P_i^ω unidades monetarias en el activo i, si el tipo de interés cambia de r^c a r^ω.

Denotando por V el valor final mínimo de la cartera que el inversor quiere maximizar, el problema de selección de la cartera se puede modelizar como:

$$\text{máx}\, V \tag{5}$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i P_i = I_0 \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i v_i^\omega \geq V \quad \forall \omega \in \Omega \tag{7}$$

$$Z_i, V \geq 0 \tag{8}$$

Este modelo de selección proporciona una cartera que sólo está inmunizada contra el riesgo de tipo de interés, al principio del horizonte temporal de planificación, en adelante HTP. Desafortunadamente, el comportamiento dinámico de la duración de la cartera supone que esta inmunización no está garantizada durante todo el periodo de planificación. Esta garantía sólo se conseguiría, si todos los activos considerados fuesen cupón cero con vencimiento al final del HTP.

Obsérvese que el modelo estático (5)-(8) proporciona decisiones que no dependen de los escenarios futuros de los tipos de interés. Una planificación prudente tendría, no sólo, que tener en cuenta futuras fluctuaciones de los parámetros inciertos, sino que debería ser capar de adaptarse a ellas. Por todo ello, es necesario extender el modelo introduciendo dinámica en él. Tendremos que tener en cuenta el carácter aleatorio de los tipos de interés y la incertidumbre que este hecho conlleva. Propondremos un modelo estocástico con recurso, ésto es, en el que las variables de decisión se ajusten temporalmente a la nueva información disponible en cada momento.

4. Elementos del problema

Conjuntos:

$\mathcal{I}$, conjunto total de activos, i, a incluir en la cartera. $|\mathcal{I}| = n$ es el cardinal o número de activos disponibles. Sin pérdida de generalidad, se supondrá que hay n bonos cupón de disitintas calificaciones crediticias disponibles en t_0, cuyos vencimientos serán t_1, t_2,..., t_l,..., t_n respectivamente; los pagos de cupón se dan en los momentos de reajuste.

$\mathcal{J}$, conjunto total de clases de activos de renta fija considerados. Es decir, es el conjunto de calificaciones crediticias diferentes consideradas.

$\mathcal{I}_j$, conjunto de activos que pertenecen a la clase j, $\mathcal{I}_j \subset \mathcal{I}$, tal que $\mathcal{I} = \cup_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{I}_j$, $\mathcal{I}_j \cap \mathcal{I}_g = \emptyset$, $j, g \in \mathcal{J} : j \neq g$.

$\mathcal{T}$, conjunto de periodos de vencimiento o madurez, t_i, donde t_i es el periodo de madurez del bono i, donde $i = 1, \ldots, n$, más el periodo inicial t_0. $|\mathcal{T}| = T$ es el periodo final y coincide con el valor $\text{máx}_{i \in \mathcal{I}} t_i$ o periodo de vencimiento más largo.

El conjunto $\mathcal{T}$ es la discretización o partición del horizonte temporal que se considera particionado en n intervalos de igual longitud h:

$$[t_0, t_1], \ldots [t_{l-1}, t_l], \ldots [t_{n-1}, t_n].$$

Adicionalmente, el conjunto de activos estará ordenado en relación a esta discretización, de manera que $t_i \leq t_{i-1}, \forall i \in \mathcal{I}$.

k, número de etapas de decisión, en las que se realiza el reajuste de la cartera. La cartera inicial se constituye en $k = 0$, es decir al comienzo del intervalo, $[t_0, t_1]$, y se reajusta al principio de cada uno de los intervalos siguientes, es decir, al principio del intervalo $[t_l, t_{l+1}]$. El instante que determina la última decisión será t_k.

Ω, el conjunto de escenarios considerados, en este caso muestran distintas situaciones conjuntas para los tipos de interés y para las probabilidades de incumplimiento. $|\Omega|$ denota el número de escenarios.

Parámetros deterministas:

I_0, presupuesto inicial de inversión.

F_i, valor nominal del activo i, para $i \in \mathcal{I}$.

t_i, periodo de madurez o vencimiento del activo i, para $i \in \mathcal{I}$.

α, porcentaje del volumen negociado, que representa los costes de transacción que afectan a cada reajuste. Además se considera que el nominal y los pagos de cupón no generan costes de transacción.

$P_{0,i}$, precio unitario del mercado del activo i, al comienzo del horizonte temporal de planificación, para $i \in \mathcal{I}$.

c_i, cupón del activo i.

$C_{\tau,i}, = C_i(\tau)$**,** corriente de pagos generada por una unidad del activo i en el periodo de tiempo τ, que se calcula como

$$C_i(\tau) = \begin{cases} c_i \cdot h, & \tau < t_i \\ P_{i0} + c_i \cdot h, & \tau = t_i \\ 0, & \tau > t_i \end{cases} \tag{9}$$

donde h es la longitud constante de cada subintervalo.

A, coeficiente relacionado con la aversión al riesgo de cada agente del mercado, en este caso del tomador de decisiones. Es la constante que mide el miedo del inversor frente al riesgo de inmunización. De forma que en caso de que A sea 0,el inversor no se va a preocupar de este riesgo, mientras que en caso de A positivo, cuanto mayor sea éste más se penalizarán las carteras con más riesgo de inmunización.

$\underline{X}^+_{t,i}, \underline{X}^-_{t,i}$, volúmenes mínimos, correspondientes al activo i, que está permitido comprar y/o vender en el periodo de tiempo t, respectivamente, para $i \in \mathcal{I}$ y $t = t_0, \ldots, t_k$.

$\overline{X}^+_{t,i}, \overline{X}^-_{t,i}$, volmenes máximos, correspondientes al activo i, que está permitido comprar y/o vender en el periodo de tiempo t, respectivamente, para $i \in \mathcal{I}$ y $t = t_0, \ldots, t_k$.

$\underline{F}_{t,j}, \overline{F}_{t,j}$, valores nominales mínimos y máximos que están permitidos para cada clase de activos j a mantener en la cartera al final del periodo t, respectivamente, para $t = t_j \in \mathcal{T} : j \in \mathcal{J}$.

$\overline{N}$, número máximo de clases de activos que pueden formar parte de la cartera en cualquier periodo del horizonte de planificación.

$\hat{N}_t$, número máximo de activos a ser negociados en t, para $t \in \mathcal{T}$.

d_i, duración del activo i con vencimiento en t_i y con la cadena de pagos dada por $C_i(t_s)$ para $t \in \mathcal{T} : t_o < t$ e $i \in \mathcal{I}$. Calculado según Macaulay (1938):

$$d_i = \frac{\sum_{t\in\mathcal{T}}(t-t_0)C_i(t)P(E_{t_0}[R_{t,j}], t_0, t)}{\sum_{t\in\mathcal{T}} C_i(t)P(E_{t_0}[R_{t,j}], t_0, t)} : i \in \mathcal{I}_j$$

Observar que este concepto es independiente de los cambios en los tipos de interés. Esto se debe a que se trata de la estimación del mercado en el instante inicial para los tipos de interés futuros.

Parámetros estocásticos:

w^ω, verosimilitud o probabilidad del escenario $\omega \in \Omega$.

r_t^ω, tipo de interés **libre de riesgo** en el escenario ω (en tanto por uno) y en el instante t.

$q_{t,j}^\omega$, la medida de riesgo calculada como una probabilidad de incumplimiento de los activos de la clase j en el instante t, donde $j \in \mathcal{J}$ y $t = t_1, \ldots, t_k$ bajo el escenario $\omega \in \Omega$.

$z_{t,j}^\omega$, la tasa de recuperación, de los activos de la clase j en el instante t, donde $j \in \mathcal{J}$ y $t = t_1, \ldots, t_k$ bajo el escenario $\omega \in \Omega$.

$R_{t,j}^\omega$, tipo de interés **real** (en tanto por uno) para los activos de la clase j en el instante t, suponiendo que se da el escenario ω. Según Hull (1989) Se calcula de la siguiente forma:

$$R_{t,j}^\omega = r_t^\omega + \frac{(1+r_t^\omega)(1-z_{t,j}^\omega)q_{t,j}^\omega}{1-(1-z_{t,j}^\omega)q_{t,j}^\omega}$$

$P_{t,i}^\omega$, precio unitario del activo i en (el final del) periodo t,en el escenario ω, si R es el tipo de interés que hay en t y suponemos la ETTI plana (es decir, que el tipo de interés no depende del vencimiento del activo i). Se obtiene de la forma:

$$P_{t,i}^\omega = \sum_{t\le\tau\le t_i} C_i(\tau)E(R_{t,j}^\omega, t, \tau) : i \in \mathcal{I}_j, j \in \mathcal{J}$$

donde $E(R_{t,j}^\omega, t, \tau) = \prod_{s=t}^{\tau}(1 + R_{s,j}^\omega \cdot h)^{-1}$.

$P^{+\omega}_{t,i}$, precio de compra unitario del activo i en (el final del) periodo t, en el escenario ω, si R es el tipo de interés que hay en t y suponemos la ETTI plana. Es decir, el coste proporcional unitario de compra de un activo al considerar los costes de transacción (α).

$$P^{+\omega}_{t,i} = (1+\alpha)P^{\omega}_{t,i}$$

$P^{-\omega}_{t,i}$, precio de venta unitario del activo i en (el final del) periodo t, en el escenario ω, si R es el tipo de interés que hay en t y suponemos la ETTI plana. Es decir, el coste proporcional unitario de venta de un activo al considerar los costes de transacción (α).

$$P^{-\omega}_{t,i} = (1-\alpha)P^{\omega}_{t,i}$$

$CF^{+\omega}_{t,i}$, coste fijo de compra unitario del activo i en (el final del) periodo t, en el escenario ω, si R es el tipo de interés que hay en t y suponemos la ETTI plana. Es decir, el coste fijo unitario de compra de un activo al considerar los costes de transacción (β).

$$CF^{+\omega}_{t,i} = \beta^{+\omega}_{t,i}P^{\omega}_{t,i}$$

$CF^{-\omega}_{t,i}$, precio de venta unitario del activo i en (el final del) periodo t, en el escenario ω, si R es el tipo de inters que hay en t y suponemos la ETTI plana. Es decir, el coste unitario de venta de un activo al considerar los costes de transacción (β).

$$CF^{-\omega}_{t,i} = \beta^{-\omega}_{t,i}P^{\omega}_{t,i}$$

$v^{\omega}_{t,i}$, valor presente descontado en t de una inversión de $P^{\omega}_{t,i}$ unidades monetarias del activo i realizada en t_0, en el escenario ω, si el tipo de interés cambia de R a R'. Se calcula como:

$$v^{\omega}_{t,i} = \frac{\sum_{l=t+1}^{T} C_i(l)E(R^{\omega}_{t,j}, t, l)}{E(R'^{\omega}_{t,j}, t, t_k)} : i \in \mathcal{I}_j, j \in \mathcal{J}$$

para $t = t_0, \ldots, t_k$ e $i \in \mathcal{I}$.

D^{ω}_t, duración de la cartera en t, para $t = t_0, \ldots, t_{k-1}$ siendo s tal que $t_s = t$ y, por lo tanto, teniendo en cuenta todos los bonos de vencimiento t_s o superior.

$$D^{\omega}_t = \frac{\sum_{i\in\mathcal{I}:t<t_k} Z_{t,s+i}P^{\omega}_{t,s+i}d_i}{(1+E_{t_0}[R_t])^s \sum_{i\in\mathcal{I}} Z_{0,i}P_{0,i}},$$

En una cartera inmunizada, según el teorema de Khang (1983), el valor de D_t^ω en el periodo t_s y bajo el escenario $\omega \in \Omega$ debe ser cercano a $t_{k-1} - t_s$, mientras que en una cartera no inmunizada será cercana a la duración de un activo con vencimiento en t_{k-1}, esto es $d_{t_{k-1}}$.

$M_t^{2\omega}$, medida de dispersión que mide el riesgo de inmunización. Es bien conocido, que la naturaleza de la dinámica de los tipos de interés es mucho más compleja que la que hemos supuesto, y por tanto, las estrategias pueden fallar si la estructura de la ETTI real difiere mucho de aquella que se ha supuesto. Esto se conoce como el *riesgo de inmunización*.

Aunque, hay varias alternativas para medir el riesgo de inmunización, una de las más aceptadas es la medida de dispersión propuesta por Fong y Vasicek (1983), conocida como M^2. Estos mismos autores probaron que minimizando esta dispersión cuadrática, se minimiza el efecto de un movimiento distinto al supuesto en el valor final de la cartera.

$$M_i^{2\omega} \frac{= \sum_{t<t_i} (t-t_i)^2 C_i(t_r) P_i^\omega(r,t_i,t)}{\sum_{r=s+1}^{i} C_i(t) P_i^\omega(r,t_i,t)} \tag{10}$$

Variables de decisión:

$X_{t,i}^{+\omega}$, volumen de compra del activo i en el periodo t, en el escenario ω.

$X_{t,i}^{-\omega}$, volumen de venta del activo i en el periodo t, en el escenario ω.

$Z_{t,i}^{\omega}$, volumen del activo i a mantener en la cartera después de las transacciones realizadas en el periodo t, en el escenario ω.

V_t^{ω}, valor final de la cartera en el periodo de tiempo t, para $t_0 \le t \le t_k$, bajo el escenario $\omega \in \omega$.

$\gamma_{t,i}^{+\omega}$, variable 0–1, que toma el valor 1 si el activo i es seleccionado para comprarlo en el periodo de tiempo t, bajo el escenario ω y, en otro caso, su valor es 0, para $t = t_0 \dots t_k$, $i \in \mathcal{I}$.

$\gamma_{t,i}^{-\omega}$, variable 0–1, que toma el valor 1 si el activo i es seleccionado para venderlo en el periodo de tiempo t, bajo el escenario ω y, en otro caso, su valor es 0, para $t = t_0 \dots t_k$, $i \in \mathcal{I}$.

$\delta_{t,j}^{\omega}$, variable 0–1 que toma el valor 1 si la clase de activos j se mantiene en la cartera en el periodo t en el escenario ω y, en otro caso, su valor es 0.

Los conjuntos, parámetros y variables descritas anteriormente permiten definir un modelo de optimización bajo incertidumbre, en el que incorporar distintas posibilidades para la evolución de los tipos de interés asi como para las probabilidades de incumplimiento, mediante la consideración de un conjunto de escenarios.

4.1. Restricciones del modelo

En el periodo inicial, los activos que forman la cartera, deberán ser exáctamente los que se compran en ese instante. Es decir, se parte de una cartera que se forma en el momento inicial, no hay activos previos en la cartera:

$$Z_{0,i} = X^{+}_{0,i}, \quad \forall i \in \mathcal{I} \tag{11}$$

Además, se considera que el nominal y los pagos del cupón no generan costes de transacción, aunque, no sería difícil implementar esta posibilidad. Así los precios de compra de los activos crecen en un porcentaje α, y los precios de venta decrecen en la misma proporción.

Pero los costes de transacción pueden no afectar tan solo de forma proporcional a la cantidad invertida en cada activo, sino que también puede haber un coste mínimo por transacción (al que llamaremos β^{+} en las compras y β^{-} en las ventas) que hará que no sean rentables las transacciones muy pequeñas. En nuestro modelo supondremos que el coste fijo será asociado a cada activo, y será mayor cuanto más costoso sea este activo. Por tanto, lo tomaremos en proporción no a la cantidad invertida en el activo, pero sí a su precio.

Para introducir estos costes fijos, hay que utilizar variables enteras 0-1. Definida la variable γ^{+} que vale 1 si compramos un activo concreto, y 0 en caso contrario, bastaría con pagar $\beta^{+}p\gamma^{+}$ cada vez que compremos. Y de igual forma, definida la variable γ^{-} que vale 1 si vendemos y 0 en caso contrario, bastaría con pagar $\beta^{-}p\gamma^{+}$ en cada venta.

Así, la restricción que asigna la inversión inicial será de la forma:

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} (1+\alpha) P_{0,i} X^{+\omega}_{0,i} + \sum_{i \in \mathcal{I}} \beta^{+}_{0,i} P_{0,i} \gamma^{+}_{0,i} = I_0 \tag{12}$$

Para que el volumen de activo comprado (X^{+}) y vendido (X^{-}) en cada periodo tenga relación directa con el volumen de activo que se encuentra en la cartera, Z, en cada momento, hay que incluir las siguientes restricciones:

$$Z^{\omega}_{t,i} = Z^{\omega}_{t-1,i} + X^{+\omega}_{t,i} - X^{-\omega}_{t,i}, \forall i \in \mathcal{I} : t > t_i; t = t_0, \ldots, t_k; \omega \in \Omega \tag{13}$$

$$Z^{\omega}_{t-1,i:t=t_i} = X^{-\omega}_{t,i:t=t_i}, \forall t = t_1, \ldots, t_k; \omega \in \Omega \tag{14}$$

$$Z^{\omega}_{t-1,i:t=t_i} = X^{-\omega}_{k,i}, \forall i \in \mathcal{I} : t_{k+1} \leq t_i; \omega \in \Omega \tag{15}$$

La ecuación (13), es la ecuación de balance entre periodos. Las ecuaciones (14) y (15) establecen la venta de activos al final del HTP, bien para aquellos cuyo vencimiento es dicho periodo final, como aquellos que vencen posteriormente; y por lo tanto, la destrucción de la cartera.

Igual que en modelo presentado en la sección anterior uno de los objetivos de este modelo es garantizar un valor mínimo de la cartera en cada periodo. Es decir, bajo cada escenario, exigiremos que el valor presente descontado de nuestra inversión en cada periodo de timepo sea mayor o igual que el valor de la cartera en t.

$$\sum_{i \in I : t < t_i} Z^{\omega}_{t,i} v^{\omega'}_{t,i} \geq V^{\omega}_t, \forall \omega, \omega' \in \Omega \tag{16}$$

Por otro lado, también se exige que sea una cartera autofinanciada. Es decir, que el efectivo que se utiliza para comprar un nuevo activo en cada periodo, será el obtenido de la venta los activos, y de la rentabilidad obtenida en forma de cupón de los bonos de la cartera.

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{I} : t < t_i} ((1+\alpha) P^{\omega}_{t,i} X^{+\omega}_{t,i} + \beta^{+\omega}_{t,i} P^{\omega}_{t,i} \gamma^{+\omega}_{t,i}) - \sum_{i \in \mathcal{I} : t < t_i} ((1-\alpha) P^{\omega}_{t,i} X^{-\omega}_{t,i} - \\ -\beta^{-\omega}_{t,i} P^{\omega}_{t,i} \gamma^{-\omega}_{t,i}) - F_s X^{-\omega}_{t=t_i,i} = \sum_{i \in \mathcal{I} : t < t_i} c_i Z^{\omega}_{t-1,i} \end{aligned} \tag{17}$$

Para terminar, nos deshacemos de la cartera, y por tanto, el valor final de la cartera es el resultante de la suma entre el efectivo obtenido de la venta de los activos, y la rentabilidad obtenida de los cupones que pagan los bonos:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{I} : t_k < t_i} ((1-\alpha) P^{\omega}_{t_k,i} X^{-\omega}_{t_k,i} - \beta^{-\omega}_{t_k,i} P^{\omega}_{t_k,i} \gamma^{-\omega}_{t_k,i}) + F_k X^{-\omega}_{t_k=t_i,i} + \\ + \sum_{i \in \mathcal{I} : t_k < t_i} c_i Z^{\omega}_{t_{k-1},i} = V^{\omega}_k \end{aligned} \tag{18}$$

Para que las variables de decisión γ^+ y γ^- que toman valores enteros 0-1 sean consistentes con el modelo, éstas deberán tener relación directa con las variables que controlan las compras y ventas. Para eso se introduce el conjunto de restricciones siguiente:

$$\underline{X}^{+}_{t,i}\gamma^{+\omega}_{t,i} \leq X^{+\omega}_{t,i} \leq \overline{X}^{+}_{t,i}\gamma^{+\omega}_{t,i}, \forall t = t_0 \ldots t_{k-1} \tag{19}$$

$$\underline{X}^{-}_{t,i}\gamma^{-\omega}_{t,i} \leq X^{-\omega}_{t,i} \leq \overline{X}^{-}_{t,i}\gamma^{-\omega}_{t,i}, \forall t = t_1 \ldots t_k \tag{20}$$

Estas restricciones permiten además, al inversor, tomar decisiones más flexibles sobre su cartera. Es decir, permiten establecer cotas máximas y mínimas de inversión en cada activo. De igual forma, también se puede definir un número máximo de transacciones a realizar en cada periodo ($\hat{N}_t$), utilizando estas mismas variables:

$$\sum_{i\in\mathcal{I}:t<t_i} \gamma^{+\omega}_{t,i} + \sum_{i\in ß:t<t_i} \gamma^{-\omega}_{t,i} \leq \hat{N}_t \tag{21}$$

Por último, para que estas variables tengan sentido, hay que asegurarse de que en un mismo periodo no se compre y se venda el mismo activo porque estaría implicando muchas operaciones innecesarias. Esto se consigue introduciendo el conjuno de restricciones:

$$\gamma^{+\omega}_{t,i} + \gamma^{-\omega}_{t,i} \leq 1, \forall i \in \mathcal{I}; t = t_0, \ldots, t_k \tag{22}$$

Además, en nuestro caso, pretendemos diferenciar los bonos según su calificación crediticia (o *rating*). No en vano, el rating de un bono no sólo es directamente proporcional al precio, sino que, también está altamente correlacionado con su riesgo. Y no es muy difícil pensar que pueda haber inversores muy aversos al riesgo que prefieran huir de bonos con mala calificación crediticia.

Así, se pueden incluir restricciones que permitan decidir, el número máximo o mínimo de elementos de un mismo grupo a incluir en la cartera deseada (no incluir muchos activos arriesgados, por ejemplo). Para incluir este tipo de restricciones, se define δ como una variable que toma valor 1 si hay un elemento del grupo de la cartera y 0 en caso contrario.

$$\underline{F}_{t,j}\delta^{\omega}_{t,j} \leq \sum_{i\in\mathcal{I}_j:t_i\leq t_{|T|-t}} F_i Z^{\omega}_{t,i} \leq \overline{F}_{t,j}\delta^{\omega}_{t,j} \tag{23}$$

También se puede decidir limitar el número de grupos distintos en la cartera, mediante la restricción:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} \delta^{\omega}_{t,j} \leq \overline{N} \tag{24}$$

5. Modelo determinista equivalente

Cuando se considera un número de escenarios finito, un programa estocástico general de dos etapas puede ser expresado en términos de las variables de decisión de la primera etapa, siendo equivalente a un problema de grandes dimensiones dual angular por bloques, introducido en Wets (1966) y conocido como modelo determinista equivalente, en adelante DEM.

Bajo el conjunto de escenarios, en un primer momento, se considera que el objetivo es maximizar el valor esperado de la cartera. Adicionalmente, la medida de dispersión M^2 es introducida en el modelo penalizando la función objetivo con ayuda del parámetro A>0. Como veremos, es posible obtener diferentes carteras óptimas dependiendo del valor de A.

$$\text{máx}\, V_{t_0} + \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{t=t_1}^{t_k} w^{\omega} V^{\omega}_t - A \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{i \in \mathcal{I}} M^{2\omega}_{t,i} Z^{\omega}_{t,i} \tag{25}$$

sujeto a

$$Z_{0,i} = X^{+}_{0,i}, \forall i \in \mathcal{I} \tag{26}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} (1+\alpha) P_{0,i} X^{+\omega}_{0,i} + \sum_{i \in \mathcal{I}} \beta^{+}_{0,i} P_{0,i} \gamma^{+}_{0,i} = I_0 \tag{27}$$

$$Z^{\omega}_{t,i} = Z^{\omega}_{t-1,i} + X^{+\omega}_{t,i} - X^{-\omega}_{t,i}, \forall i \in \mathcal{I} : t < t_i; t = t_1 \ldots t_{k-1}; \omega \in \Omega \tag{28}$$

$$Z^{\omega}_{t-1,i:t_i=t} = X^{-\omega}_{t,i:t_i=t}, \forall t = t_1 \ldots t_k; \omega \in \Omega \tag{29}$$

$$Z^{\omega}_{t-1,j:t_j=t} = X^{-\omega}_{t_k,i}, \forall i \in \mathcal{I} : t_k < t_i; \omega \in \Omega \tag{30}$$

$$\sum_{i \in I : t < t_i} Z^{\omega}_{t,i} v^{\omega'}_{t,i} \geq V^{\omega}_t, \forall t = t_0 \ldots t_{k-1}; w \in \Omega \tag{31}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I} : t < t_i} (P^{+\omega}_{t,i} X^{+\omega}_{t,i} + CF^{+\omega}_{t,i} \gamma^{+\omega}_{t,i}) - \sum_{i \in \mathcal{I} : t < t_i} (P^{+\omega}_{t,i} X^{-\omega}_{t,i} - CF^{-\omega}_{t,i} \gamma^{-\omega}_{t,i}) -$$

$$-F_s X^{-\omega}_{t=t_I,i} = \sum_{i \in \mathcal{I} : t < t_i} c_i Z^{\omega}_{t-1,i}, \forall t = t_1 \ldots t_{k-1}; \omega \in \Omega \tag{32}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}: t_k < t_i} (P^{-\omega}_{t_k,i} X^{-\omega}_{t_k,i} - CF^{-\omega}_{t_k,i} \gamma^{-\omega}_{t_k,i}) + F_k X^{-\omega}_{t_k = t_I, i} + \\ + \sum_{i \in \mathcal{I}: t_k < t_i} c_i Z^{\omega}_{t_{k-1},i} = V^{\omega}_k, \forall \omega \in \Omega; \omega \in \Omega \tag{33}$$

$$\underline{F}_{t,j} \delta^{\omega}_{t,j} \leq \sum_{i \in \mathcal{I}_j : t_i \leq t_{|T|-t}} F_i Z^{\omega}_{t,i} \leq \overline{F}_{t,j} \delta^{\omega}_{t,j}, \\ \forall t = t_0 \dots t_k; j \in \mathcal{J}; \omega \in \Omega \tag{34}$$

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} \delta^{\omega}_{t,j} \leq \overline{N}, \forall t = t_0 \dots t_{k-1}; i \in \mathcal{I}; \omega \in \Omega \tag{35}$$

$$\underline{X}^{+}_{t,i} \gamma^{+\omega}_{t,i} \leq X^{+\omega}_{t,i} \leq \overline{X}^{+}_{t,i} \gamma^{+\omega}_{t,i}, \forall t = t_0 \dots t_{k-1}; i \in \mathcal{I}; \omega \in \Omega \tag{36}$$

$$\underline{X}^{-}_{t,i} \gamma^{-\omega}_{t,i} \leq X^{-\omega}_{t,i} \leq \overline{X}^{-}_{t,i} \gamma^{-\omega}_{t,i}, \forall t = t_1 \dots t_k; \omega \in \Omega \tag{37}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}: t < t_i} \gamma^{+\omega}_{t,i} + \sum_{i \in \mathcal{I}: t < t_i} \gamma^{-\omega}_{t,i} \leq \hat{N}_t, \forall t = t_0 \dots t_k; \omega \in \Omega \tag{38}$$

$$\gamma^{+\omega}_{t,i} + \gamma^{-\omega}_{t,i} \leq 1, \forall t = t_1 \dots t_{k-1}; i \in \mathcal{I} : t < t_i; \omega \in \Omega \tag{39}$$

$$0 \leq V^{\omega}_t, 0 \leq Z^{\omega}_{t,i}, \forall i \in \mathcal{I} : t < t_i; \forall t = t_0 \dots t_k; \omega \in \Omega \tag{40}$$

$$0 \leq X^{+\omega}_{t,i}, \gamma^{+\omega}_{t,i} \in \{0,1\}, \forall i \in \mathcal{I} : t < t_i; t = t_0 \dots t_{k-1}; \omega \in \Omega \tag{41}$$

$$0 \leq X^{-\omega}_{t,i}, \gamma^{+\omega}_{t,i} \in \{0,1\}, i \in \mathcal{I} : t \leq t_i; \forall t = t_1 \dots t_k; \omega \in \Omega \tag{42}$$

$$0 \leq \delta^{\omega}_{t,j} \in \{0,1\}, \forall t = t_0 \dots t_k; j \in \mathcal{J}; \omega \in \Omega \tag{43}$$

$$\tag{44}$$

6. Caso de estudio

Un vez introducido el modelo, es interesante ver su comportamiento. Y ver, además, si la introducción de los nuevos conceptos afecta a la validez del teorema de Khang. Es decir, si la relajación de las condiciones necesarias para la demostración de este teorema, afectan a la efectividad del resultado.

Con ese fin, definimos un mercado compuesto por ocho bonos distintos, cuatro de ellos con una muy buena certificación crediticia -que podrían ser bonos del estado-, y otros cuatro de alguna entidad financiera, con mayor riesgo de crédito.

i	Madurez: t_i	Calif. Credit.	Prob. Incumplim.: q_i^ω
Activo 1	0.5	AAA	0.00
Activo 2	0.5	CCC	0.1979
Activo 3	1	AAA	0.00
Activo 4	1	CCC	0.1979
Activo 5	1.5	AAA	0.00
Activo 6	1.5	CCC	0.1979
Activo 7	2	AAA	0.00
Activo 8	2	CCC	0.1979
i	**Tasa recup.: z_i^ω**	**Cupón anual: C_i**	**Duración: d_i**
Activo 1	0.705	4 %	0.5
Activo 2	0.357	4 %	0.5
Activo 3	0.705	4 %	0.990243
Activo 4	0.357	4 %	0.989537
Activo 5	0.705	4 %	1.47101
Activo 6	0.357	4 %	1.46747
Activo 7	0.705	4 %	1.94257
Activo 8	0.357	4 %	1.93264

Suponemos, también, que el tipo de interés vigente, con pagos de cupones semianuales, es del 4 %. Además, los tipos de interés pueden subir o bajar en 100 puntos básicos de un semestre a otro.

Existe, además, un inversor con un HTP de 18 meses dispuesto a invertir diez mil unidades monetarias en el mercado descrito anteriormente. Por tanto, como a lo largo de año y medio (HTP), la composición de la cartera se puede variar de forma semestral. Se forma la cartera en t=0 (hoy) y se reajusta en t=0.5 (en seis meses), en t=1 (dentro de un año) y al llegar al periodo t=1.5=HTP (dentro de año y medio).

Planteamos inicialmente un modelo estocástico de dos etapas, que nos diga cómo construir la cartera hoy y qué hacer en periodos futuros de reajuste en función de los escenarios futuros que puedan acontecer.

Se analiza a continuación la solución estocástica que se obtiene con unos costes de transacción proporcionales (α) del 0.15 % y unos costes fijos comunes para todos los activos (β) del 0.1 % y suponiendo que el tomador de decisiones es averso al riesgo (es decir, $A = 0{,}1$). Para implementar este problema se ha desarrollado un programa en C++, con ayuda de la librería COIN de IBM.

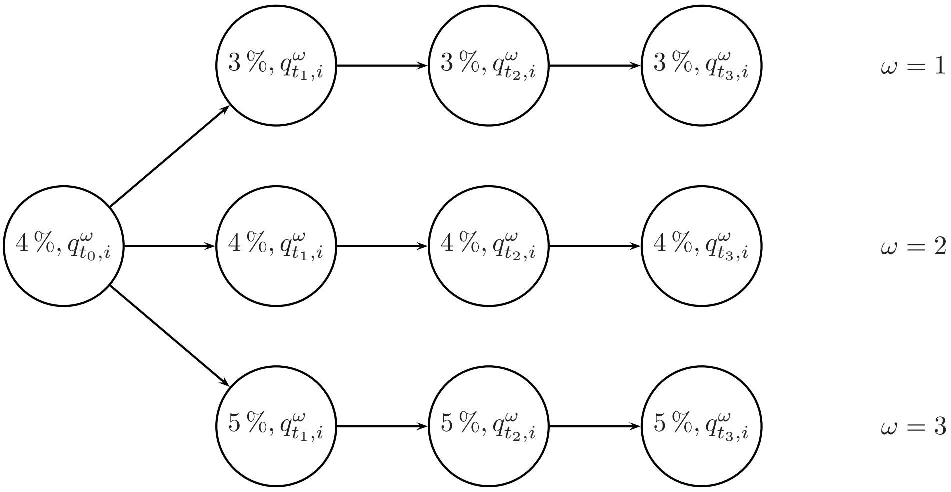

Figura 1: árbol de escenarios posibles

Cabe destacar que existen dos fuentes de incertidumbre, o dos riesgos, asociados al modelo: el riesgo de tipo de interés y el riesgo de incumplimiento. Con la idea de aislar los efectos que cada uno de ellos produce en la estrategia de inversión óptima, se prueba primero el resultado en un mercado en el que todos los bonos son AAA, excluyendo así el riesgo de incumplimiento del modelo. De esta forma, veremos cómo afectan los costes de transacción y el riesgo de tipo de interés a la optimalidad del resultado teórico obtenido por Khang.

ω	s	t_s	$Z^{\omega}_{t_s,1}$	$Z^{\omega}_{t_s,2}$	$Z^{\omega}_{t_s,3}$	$Z^{\omega}_{t_s,4}$	$Z^{\omega}_{t_s,5}$	$Z^{\omega}_{t_s,6}$	$Z^{\omega}_{t_s,7}$	$Z^{\omega}_{t_s,8}$	$D^{\omega}_{t_s}$
	0	0	0	0	0	0	0	9776.22	0	208.78	1.48
1	1	0.5	-	-	0	0	199.54	9776.22	0	206.70	1.01
	2	1	-	-	-	-	608.96	9776.22	0	0	0.505
2	1	0.5	-	-	0	0	199.39	9776.22	0	208.78	1.00
	2	1	-	-	-	-	610.92	9776.22	0	0	0.500
3	1	0.5	-	-	0	0	201.331	9776.22	0	208.78	0.99
	2	1	-	-	-	-	201.331	9980.63	0	208.78	0.505

Se observa que en este caso, la solución óptima se acerca mucho a aquella propuesta por Khang. La inclusión de costes de transacción afecta a la optimalidad de esta estrategia, aunque la mejor solución es aquella que acerca la duración lo más posible al HTP, evitando estos costes en la medida de lo posible. A continuación se resume qué ocurre en el caso en el que se incluyen activos calificados como CCC por el Standard & Poors.

ω	s	t_s	$Z^{\omega}_{t_s,1}$	$Z^{\omega}_{t_s,2}$	$Z^{\omega}_{t_s,3}$	$Z^{\omega}_{t_s,4}$	$Z^{\omega}_{t_s,5}$	$Z^{\omega}_{t_s,6}$	$Z^{\omega}_{t_s,7}$	$Z^{\omega}_{t_s,8}$	$D^{\omega}_{t_s}$
	0	0	0	0	0	4515.55	0	0	0	8009.46	1.2829
1	1	0.5	-	-	0	0	0	0	0	14587.1	1.2829
	2	1	-	-	-	-	0	4842.45	0	11000	0.893
2	1	0.5	-	-	0	0	0	0	0	14661.9	1.2699
	2	1	-	-	-	-	0	4910.32	0	11000	0.8931
3	1	0.5	-	-	0	0	0	0	0	14737.2	1.257
	2	1	-	-	-	-	0	4978.22	0	11000	0.89446

La solución óptima propuesta consiste en invertir una gran parte de la cartera en el activo de posterior vencimiento y, por tanto, que ofrece mayor rentabilidad, y ajustar la duración añadiendo una parte compuesta por el activo que vence antes del HTP en el instante inicial.

Un vez transcurrido el primer periodo, la estrategia a tomar depende del escenario que acontezca. Pero en todos ellos, la estrategia óptima consiste en mantener el bono con mayor duración deshaciéndose del resto de la cartera, pero reinvirtiendo en el que vence al final del HTP.

Con la política de inversiones propuesta se alcanza al final del periodo de planificación, un objetivo esperado óptimo consistente en:

$$z_{RP} = V_{t_0} + \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{t \in \mathcal{T}: t > t_0} \omega^{\omega} V_t^{\omega} - A \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{i \in \mathcal{I}} M_{t,i}^{2\omega} Z_{t,i}^{\omega} = 6806080$$

De cualquier forma, es necesario remarcar el hecho de que todos los activos en los que se invierte son aquellos con mayor riesgo (recordar que los activos impares son los bonos del estado, y los pares son bonos de alguna entidad financiera). No es muy sorprendente dado que los activos arriesgados son aquellos que ofrecen mayores rendimientos, y la función objetivo contemplada no penaliza el riesgo. Además, observamos que la estrategia óptima se aleja mucho de aquella propuesta por Khang. Ambos problemas pueden deberse a un inadecuado tratamiento del riesgo de incumplimiento en el modelo. En la siguiente sección se propone una forma más adecuada de tratar la incertidumbre inherente a la calificación crediticia de los bonos.

7. Mundo averso al riesgo

La programación estocástica tradicional es neutral al riesgo, en el sentido de que se refiere a la optimización, en nuestro caso maximización de un valor esperado. La solución óptima se obtiene como la que proporciona el mayor valor esperado de la cartera. Una técnica común para tener en cuenta el riesgo en los problemas de toma de decisiones es considerar una función objetivo media-riego, en la que se incluya un factor de riesgo en la propia función objetivo.

Es aconsejable tanto que la modelización media-riesgo presente buenas propiedades como que sea computacionalmente viable. Dada la gran variedad de criterios, no puede decirse que exista, hoy en día, una medida de riesgo universal recomendable.

En este caso, el factor de riesgo se define a partir del juego que sigue. En $t = 0$ hay una ganancia segura de V_0 (ya que si estuviera en incumplimiento no se compraría) pero una vez transcurrido ese periodo hay dos posibilidades: quiebra o no quiebra. En el primer caso desaparecería el bono por lo que dejaría de dar ganancia. En el segundo caso seguiría con la inversión, volviendo a tener dos posibilidades: quiebra o no quiebra. De esta forma, la probabilidad de que haya quiebra en el instante t, es la misma que de que no quiebre en ninguno de los instantes anteriores, pero sí en el último. Es decir,

$$\left(\prod_{s<t}(1-q^{\omega}_{s,i})\right)q^{\omega}_{t,i}$$

El juego se resume en la siguiente figura para cada $i \in \mathcal{I}$ y $\omega \in \Omega$:

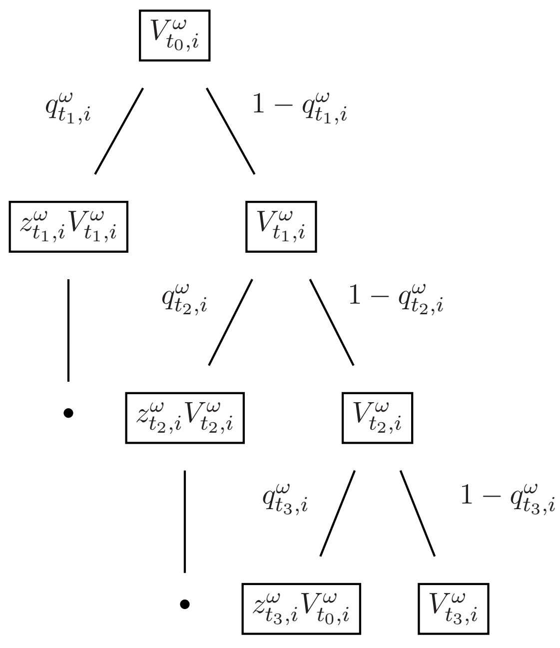

Figura 2: Valor esperado de la cartera teniendo en cuenta el incumplimiento

Por tanto, jugando hasta el instante t_1, la función objetivo esperada será para cada

$i \in \mathcal{I}, \omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} & V_{t_0,i} + q^{\omega}_{t_1,i} \cdot z^{\omega}_{t_1,i} \cdot V^{\omega}_{t_1,i} + \\ + \quad & (1 - q^{\omega}_{t_1,i}) \cdot \Big(V^{\omega}_{t_1,i} + \text{seguir jugando} \Big) \end{aligned}$$

En ese momento, vuelven a presentarse dos posibilidades y, por tanto,

$$\begin{aligned} & V_{t_0,i} + q^{\omega}_{t_1,i} \cdot z^{\omega}_{t_1,i} \cdot V^{\omega}_{t_1,i} + \\ + \quad & (1 - q^{\omega}_{t_1,i}) \cdot \Big(V^{\omega}_{t_1,i} + q^{\omega}_{t_2,i} \cdot z^{\omega}_{t_2,i} \cdot V^{\omega}_{t_2,i} + (1 - q^{\omega}_{t_2,i}) \cdot (V_{t_2,i} + \text{seguir jugando}) \Big) \end{aligned}$$

En general, la función objetivo a maximizar será

$$\text{máx}\, V_{t_0} + \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{i \in \mathcal{I}} w^{\omega} \left(\prod_{s \in \mathcal{T}; s < t} (1 - q^{\omega}_{s,i}) \right) \Big(q^{\omega}_{t,i} z^{\omega}_{t,i} + (1 - q^{\omega}_{t,i}) \Big) V^{\omega}_{t,i} - A \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{i \in \mathcal{I}} M^{2\omega}_{t,i} Z^{\omega}_{t,i} \tag{45}$$

Es decir, se maximiza el valor esperado en el conjunto de escenarios de una nueva función objetivo

$$\text{máx}\, V_{t_0} + \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{i \in \mathcal{I}} w^{\omega} f(\omega) - A \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{i \in \mathcal{I}} M^{2\omega}_{t,i} Z^{\omega}_{t,i}$$

donde el nuevo término $f(\omega)$, bajo cada escenario viene dado por:

$$\left(\prod_{s \in \mathcal{T}; s < t} (1 - q^{\omega}_{s,i}) \right) \Big(q^{\omega}_{t,i} z^{\omega}_{t,i} + (1 - q^{\omega}_{t,i}) \Big) V^{\omega}_{t,i}$$

y $V^{\omega}_{t,i}$ representa el valor de la inversión en el i-ésimo activo, en el instante t, bajo el escenario ω, donde se satisface:

$$Z^{\omega}_{t,i} v^{\omega'}_{t,i} \geq V^{\omega}_{t,i}, \forall t = t_0 \dots t_{k-1}; \forall w \in \Omega; \forall i \in \mathcal{I} \tag{46}$$

Implementando esta función objetivo para el mismo caso de estudio que en el apartado anterior, se obtienen los siguientes resultados:

ω	s	t_s	$Z^{\omega}_{t_s,1}$	$Z^{\omega}_{t_s,2}$	$Z^{\omega}_{t_s,3}$	$Z^{\omega}_{t_s,4}$	$Z^{\omega}_{t_s,5}$	$Z^{\omega}_{t_s,6}$	$Z^{\omega}_{t_s,7}$	$Z^{\omega}_{t_s,8}$	$D^{\omega}_{t_s}$
	0	0	0	0	0	0	0	2040.31	0	11000	1.42
1	1	0.5	-	-	0	0	0	4157.29	0	10258.2	1.1189
	2	1	-	-	-	-	0	15157.3	0	60.7301	0.4963
2	1	0.5	-	-	0	0	0	4157.29	0	10270.4	1.1042
	2	1	-	-	-	-	0	15157.3	0	30.1674	0.4896
3	1	0.5	-	-	0	0	0	4157.29	0	10282.9	1.0896
	2	1	-	-	-	-	0	15157.3	0	0	0.48301

En este caso, la estrategia óptima consiste en invertir una gran parte en el activo que vence en el HTP y ajustar la duración invirtiendo también en aquel bono de mayor vencimiento. Una vez transcurrido el primer periodo, la estrategia óptima sugiere reinvertir casi todo en el activo que vence en el HTP, deshaciendo poco a poco la inversión en el otro activo. El valor esperado de la cartera en este caso es:

$$\begin{aligned}&\max V_{t_0} + \sum_{\omega\in\Omega}\sum_{i\in\mathcal{I}} w^{\omega}\left(\prod_{s\in\mathcal{T};s<t}(1-q^{\omega}_{s,i})\right)\left(q^{\omega}_{t,i}z^{\omega}_{t,i} + (1-q^{\omega}_{t,i})\right)V^{\omega}_{t,i} - \\ &-A\sum_{\omega\in\Omega}\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{i\in\mathcal{I}} M^{2\omega}_{t,i}Z^{\omega}_{t,i} = 6691680\end{aligned}$$

Es menor a la obtenida en el mundo neutral al riesgo. Esto se debe a que en este caso, se ha tenido en cuenta la posibilidad de quiebra en algún momento. Aun así , se observa que la estrategia óptima sigue invirtiendo en activos arriesgados. Esto se debe a que los precios de los bonos se han calculado de forma que sean competentes en el mercado. Es decir, se supone que dos bonos con distinto riesgo no pueden costar lo mismo, ya que en tal caso, nadie compraría el arriesgado. Por tanto el precio de los bonos arriesgados es aquel que hace al inversor poder dudar entre ambos.

Aun así, es habitual penalizar más las situaciones adversas. Por esa razón, se introduce el peso, b^{ω}, con el que el inversor penaliza el incumplimento bajo cada escenario.

$$\begin{aligned}&\max V_{t_0} + \sum_{\omega\in\Omega}\sum_{i\in\mathcal{I}} w^{\omega}\left(\prod_{s\in\mathcal{T};s<t}(1-b^{\omega}q^{\omega}_{s,i})\right)\left(b^{\omega}q^{\omega}_{t,i}z^{\omega}_{t,i} + (1-b^{\omega}q^{\omega}_{t,i})\right)V^{\omega}_{t,i} - \\ &-A\sum_{\omega\in\Omega}\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{i\in\mathcal{I}} M^{2\omega}_{t,i}Z^{\omega}_{t,i} \qquad (47)\end{aligned}$$

De esta forma, con un b^{ω} siempre mayor que uno, se da mayor peso a la probabilidad de caída, penalizando así todas aquellas carteras arriesgadas. Considerando un inversor con b^{ω}=2 se obtienen los siguientes resultados:

ω	s	t_s	$Z^{\omega}_{t_s,1}$	$Z^{\omega}_{t_s,2}$	$Z^{\omega}_{t_s,3}$	$Z^{\omega}_{t_s,4}$	$Z^{\omega}_{t_s,5}$	$Z^{\omega}_{t_s,6}$	$Z^{\omega}_{t_s,7}$	$Z^{\omega}_{t_s,8}$	$D^{\omega}_{t_s}$
	0	0	0	0	0	0	0	2040.31	0	11000	1.42
1	1	0.5	-	-	0	0	2665.08	388.849	0	11000	1.1532
	2	1	-	-	-	-	13665.1	0	0	76.0153	0.4762
2	1	0.5	-	-	0	0	2665.08	388.849	0	11013.8	1.138
	2	1	-	-	-	-	13665.1	0	0	37.8483	0.4713
3	1	0.5	-	-	0	0	2665.08	414.758	0	11000	1.122
	2	1	-	-	-	-	13665.1	0	0	0	0.4665

En este caso, se observa que en el instante inicial (como se ha supuesto que no hay quiebra) se invierte en aquellos de mayor rendimiento, es decir, aquellas que soportan mayores riesgos. Pero una vez transcurrido este periodo, teniendo en cuenta que puede haber quiebra, se incluye el activo seguro que vence en el HTP y poco a poco se deshace del resto de activos. Es una estrategia mucho más acorde con los tiempos que vivimos que cualquiera de las anteriores. Sin embargo, promete un beneficio esperado menor:

$$\text{máx}\, V_{t_0} + \sum_{\omega\in\Omega}\sum_{i\in\mathcal{I}} w^{\omega}\left(\prod_{s\in\mathcal{T};s<t}(1-b^{\omega}q^{\omega}_{s,i})\right)\left(b^{\omega}q^{\omega}_{t,i}z^{\omega}_{t,i}+(1-b^{\omega}q^{\omega}_{t,i})\right)V^{\omega}_{t,i} -$$

$$-A\sum_{\omega\in\Omega}\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{i\in\mathcal{I}} M^{2\omega}_{t,i}Z^{\omega}_{t,i} = 5799560$$

8. Conclusiones

A lo largo de este trabajo, se ha propuesto un modelo estocástico de selección de carteras en un mercado en el que existen costes de transacción y bonos de distintas calidades crediticias. De esta forma, se pretende ver si los supuestos del Teorema de Inmunización Dinámica enunciado por Khang son cruciales para su validez.

Por un lado, se ha observado que la inclusión de los costes de transacción afecta a la optimalidad de la estrategia propuesta por Khang, ya que el reajuste continuo de la cartera que éste implica, exige unos costes adicionales demasiado elevados. Lo cual implica que la estrategia inmune deja de ser óptima.

La incertidumbre es introducida en el modelo mediante la técnica denominada análisis de escenarios. En este caso, existen dos parámetros cuyo comportamiento aleatorio ha de ser tenido en cuenta, por una parte, la evolución de los tipos de interés, y por otra las probabilidades de incumplimiento de las distintas entidades emisoras de los bonos.

Sobre un caso de estudio de pequeñas dimensiones, se ha implementado el modelo con distintas funciones objetivo, obteniendose distintos y razonables resultados. En el caso de maximizar el valor esperado la estrategia óptima es aquella que sólo invierte en el activo con mayor rendimiento esperado, a pesar se ser el de mayor riesgo de incumplimiento.

Si se reemplaza el objetivo del valor esperado por una función de utilidad que penalice el incumplimiento y premie el cumplimiento se observa que el activo arriesgado sigue siendo más o menos preferido por el inversor, en función de los parámetros de aversión al riesgo que establecen dicha función de utilidad.

Elevando la penalización de incumplimento, se observa en la solución óptima obtenida, que aunque inicialmente se constituye la cartera prefiriendo el bono *arriesgado*, el tomador de decisiones se va deshaciendo de él paulatinamente hasta quedar constituida la cartera por bonos *seguros*.

Aunque fundamentalmente el riesgo de incumplimiento ha sido introducido en el modelo mediante una función de utilidad, en estos momentos se está estudiando la posibilidad de desarrollar un modelo que permita incluir un tratamiento conjunto de este riesgo junto con el riesgo de tipo de interés, definiendo escenarios sensatos al respecto.

Referencias

[1] V. Albonoz, et al. Optimización Bajo Incertidumbre. Biblioteca Comillas Andrés Ramos, Antonio Alonso-Ayuso & Gloria Pérez (eds.), 2009.

[2] E.I. Altman & V. M. Kishore. Almost Everything You Wanted to Know about Recoveries on Defaulted Bonds. Financial Analysts Journal, Vol. 52, No. 6:57-64, 1996.

[3] E. Beale. On minimizing a convex function subjet to linear inequalities. Journal of the Royal Statistical Society, series B, No. 17:173-184, 1955.

[4] G.O. Bierwag & C. Khang. An immunization strategy is a minimax strategy. Journal of Finance, May, 1979.

[5] John R. Birge & Francois Louveaux. Introduction to Stochastic Programming. Springer, 1997.

[6] R.E. Bixby, J.W. Gregory, I.J. Lustig, R.E. Marsten & D.F. Shanno. Very large scale linear programming: A case study in combining interior point and simplex methods. Operations Research, No. 40:885-897, 1992.

[7] A. Charnes & W.W. Cooper. Chanced-constrained programming. Management Science, No. 5:73-79, 1959.

[8] G.B. Dantzig. Linear programming under uncertainty. Management Science, No. 1:197-206, 1955.

[9] G.B. Dantzig. A proof of the equivalence of programming problem and the game problem. In Activity Analysis of Production and Allocation, (ed. T.C. Koopmans), Yale University Press. 7th. edition, 1971.

[10] H.G. Fong & O. Vasicek. The tradeoff between return and risk in immunized portfolios. Financial Analysts Journal, September-October, 1983.

[11] J. Hull. Options, Futures and Other Derivative Securities. Pearson Prentice Hall, 1989.

[12] C. Khang. A dynamic global portfolio inmunization strategy in the world of multiple interest rates changes: a dynamic immunizationa and minimax theorem. Journal of Financial and Quantitative Analysis, September, 1983.

[13] R. Levkovitz & G. Mitra. Solution of large scale linear programs: A review of hardware, software and algorithmic issues. Optimization in Industry. John Wiley, 139-172, 1993.

[14] I.J. Lustig, J.M. Mulvey & T.J. Carpenter. Formulating 2-stage stochastic programs for interior point methods. Journal of Operations Research, Vol: 39 No. 5:757-770, 1991.

[15] J.M. Mulvey, R.J. Vanderbei & S.A. Zenios. Robust optimization of large scale systems. Operations Research, Vol: 43 No. 2:264-281, 1995.

[16] E. Navarro & J.M. Nave. Immunization as a Maximin Strategy. The effects of Transaction Costs and Imperfect Divisibility of Financial Assets. AFIR Colloquium, 3:323-347, 1991.

[17] E. Navarro & J. M. Nave. Dynamic Immunization and transaction Costs. AFIR Colloquium 1994.

[18] R.J-B. Wets. Programming under uncertainty: the equivalent convex program. SIAM Journal of Applied Mathematics, No. 14:89-105, 1966.