

VALIDACIÓN DEL MODELO CKLS PARA LOS TIPOS DE INTERÉS A CORTO PLAZO EN ESPAÑA: UN ENFOQUE NO PARAMÉTRICO

José Manuel Gavilán Ruiz
Universidad de Sevilla
gavi@us.es

José María Alba Riesco
Universidad de Sevilla
jmalbar@us.es

Luis González Abril
Universidad de Sevilla
luisgon@us.es

15 de marzo de 2007

Resumen

En este trabajo se realiza un análisis no paramétrico de la dinámica en tiempo continuo de los tipos de interés a corto plazo en España en el marco de los modelos unifactoriales homogéneos. Las estimaciones obtenidas, en concordancia con otros autores, inducen a pensar que la deriva del modelo es no lineal y que la volatilidad está en consonancia con la propuesta en el modelo de Chan, Karolyi, Longstaff, y Sanders (1992) (modelo CKLS).

Chapman y Pearson (2000) plantean que la no linealidad de la deriva estimada podría ser espúrea y deberse a un efecto en la frontera del procedimiento de estimación no paramétrico seguido. Así, se aplica el contraste de especificación de modelos no paramétricos investigado en Kim y Wang (2006) para validar o no la posible no linealidad de la deriva con los datos de la Economía española. Como conclusión más significativa cabe destacar que el test no lleva a una evidencia contundente para rechazar la linealidad de la deriva. Además, el test lleva a aceptar la forma funcional para la volatilidad propuesta en el modelo CKLS.

Por otro lado, se realiza un estudio del efecto que en la valoración de bonos cupón cero tiene la imposición de una deriva lineal y la consideración del modelo paramétrico CKLS, en comparación con el planteamiento no paramétrico más general. Encontramos que todos los modelos considerados llevan a precios muy similares para tipos de interés bajos o medios y periodo de vencimiento no superior a 3 años; en general, las diferencias aumentan con el nivel inicial de los tipos de interés y con el periodo de vencimiento.

Clasificación JEL: C12, C14, C15, C22, E43, G12.

1. Introducción

Es innegable la importancia que la modelización de los tipos de interés tiene en el ámbito económico. Los motivos de la relevancia de estas variables económicas son variados: Aportan mucha información sobre la situación de la Economía (inflación, política monetaria,...), en Teoría Económica se usan, por ejemplo, en el estudio de la formación de expectativas, las relaciones entre los tipos a corto y a largo plazo,

la política monetaria, etc, en Economía Financiera, permite la valoración correcta de activos financieros dependientes de los tipos de interés y de sus activos derivados, lo que lleva a un conveniente diseño de estrategias de valoración y cobertura.

La evidencia empírica en la modelización de los tipos de interés (Dybvig (1989)[23], Litterman y Scheinkman (1991)[42]), muestra que es razonable usar una sola variable endógena, el tipo de interés a corto plazo, para la descripción de los movimientos de toda la estructura temporal de los tipos de interés¹, lo que justifica el uso de los modelos unifactoriales. Estos modelos, que se pueden generalizar de forma natural en varias direcciones, al describir los movimientos de toda la curva de tipos de interés a partir de la especificación de únicamente del tipo de interés a corto plazo, producen una estructura temporal de los tipos de interés endógena, no ajustando en general a la perfección la curva de tipos de interés inicialmente observada en el mercado. Aunque los modelos unifactoriales han sido criticados por este y otros motivos, proporcionan respuestas razonables a una gran variedad de problemas planteados en el marco de la Economía Financiera. Además, son modelos que destacan por su sencillez para explicar la estructura de los tipos de interés y para ser implementados.

En este contexto, se hace un estudio empírico de los tipos de interés a corto plazo libres de riesgo en España. Siguiendo la tendencia actual en economía financiera, la evolución temporal de la variable subyacente (el tipo de interés continuo compuesto instantáneo libre de riesgo), a cuyo valor en el instante t denotamos por $r(t)$, se representa mediante un proceso estocástico que evoluciona en tiempo continuo y que verifica una ecuación diferencial estocástica unidimensional.

En el marco de los modelos unifactoriales, la ausencia de consenso sobre el modelo a elegir para representar la dinámica del proceso estocástico r ha llevado a la que se propongan una gran variedad de modelos diferentes. La mayoría de ellos se consideran en un contexto paramétrico, atendiendo quizás más a razones de tratabilidad analítica y computacional que a razones de tipo económico. En concreto, un enfoque muy usado en la práctica es modelizar la dinámica de los tipos de interés a corto libres de riesgo como la solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica homogénea:

$$dr(t) = \mu(r(t))dt + \sigma(r(t))dW(t), \quad (1)$$

donde W es un movimiento Browniano estándar, y la deriva $\mu(\cdot)$ y la volatilidad $\sigma(\cdot)$ son funciones que dependen únicamente del valor actual del tipo de interés. Algunos casos particulares incluidos en esta formulación general aparecen recogidos en la Tabla 1.

También se han planteado modelos no homogéneos en el tiempo y que se apartan de la clase de modelos planteados en la ecuación (1); algunos de ellos se muestran en la Tabla 2. La principal ventaja de los modelos no homogéneos frente a los homogéneos recogidos en (1) es que, al permitir que su deriva y/o volatilidad dependan del tiempo, se pueden ajustar perfectamente a la estructura actual observada en los tipos de interés, algunos ejemplos aparecen en Björk(1997)[5]. Sin embargo, para mantener este ajuste perfecto, estos modelos deben ser replanteados y reestimados en cada instante de tiempo, lo que lleva a un enorme esfuerzo computacional.

¹Curva que relaciona los tipos de interés proporcionados por activos libres de riesgo con su plazo de vencimiento.

Referencia principal	Ecuación del modelo
Merton (1973)[45]	$dr(t) = \alpha_0 dt + \beta_0 dW(t)$
Black y Scholes (1973)[8]	$dr(t) = \alpha_1 r(t) dt + \beta_1 r(t) dW(t)$
Cox (1975)[18]	$dr(t) = \alpha_1 r(t) dt + \beta_1 r(t)^\tau dW(t)$
Vasicek (1977)[51]	$dr(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 r(t)) dt + \beta dW(t)$
Dothan (1978)[21]	$dr(t) = \beta_1 r(t) dW(t)$
Brennan y Schwartz (1980)[12]	$dr(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 r(t)) dt + \beta_1 r(t) dW(t)$
Cox, Ingersoll y Ross (1985) [19, 20]	$dr(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 r(t)) dt + \beta_1 \sqrt{r(t)} dW(t)$ (Modelo CIR)
Constantinides (1992)[16]	$dr(t) = \left(\alpha_0 + \alpha_1 r(t) + \alpha_2 \sqrt{r(t)} - \alpha_3 \right) dt + \beta_0 (r(t) - \beta_1) dW(t)$
Chan <i>et al.</i> (1992)[14]	$dr(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 r(t)) dt + \beta_2 r(t)^\tau dW(t)$ (Modelo CKLS)
Duffie y Kan (1996)[22]	$dr(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 r(t)) dt + \sqrt{\beta_0 + \beta_1 r(t)} dW(t)$
Aït-Sahalia (1996)[4]	$dr(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 r(t) + \alpha_2 r(t)^2 + \alpha_3 r(t)^{-1}) dt + (\beta_0 + \beta_1 r(t) + \beta_2 r(t)^\tau) dW(t)$

Tabla 1: Algunos modelos homogéneos unifactoriales paramétricos.

Una breve descripción de estos modelos homogéneos y no homogéneos y de su comportamiento empírico se puede encontrar en Moreno (2000)[46].

Un problema potencialmente grave de cualquier modelo paramétrico es que imponer una determinada estructura puede llevar a *errores de especificación* y en consecuencia se pueden tener errores graves al usar el modelo con propósitos de valoración y cobertura de activos de tipos de interés (ver Canabarro (1995)[13]). En un intento por evitar tales posibles errores de especificación, se han propuesto métodos no paramétricos para estimar la ecuación (1). Algunos de los más importantes son: Aït-Sahalia (1996)[3], donde se propone un procedimiento semiparamétrico para estimar la función de difusión, bajo una especificación paramétrica de la deriva. Jiang y Knight (1997)[36], donde se desarrolla un estimador no paramétrico mediante regresión núcleo para la función de difusión, y después se deduce, a partir de éste, un estimador no paramétrico consistente de la deriva, y Stanton (1997)[49], en el que se construyen fórmulas de aproximación de varios órdenes para la volatilidad y la deriva, además, bajo este enfoque se estiman la volatilidad y la deriva separadamente.

El resto de este trabajo se organiza de la siguiente manera: En la Sección 2 se elige la serie de datos que después se usa para estimar la dinámica de los tipos de interés a corto plazo en España y se hace un primer análisis de los mismos. La Sección 3 se dedica a la estimación del modelo propuesto en (1) aplicando las técnicas no paramétricas desarrolladas en Stanton (1997)[49]. Una vez estimada la deriva, la Sección 4 profundiza en la cuestión de si la no linealidad de la misma es una hipótesis estadísticamente aceptable, para ello se hace uso del test J_n desarrollado por Fan y Li (1997)[27], Li (1999)[40] y Kim y Wang (2006)[37]. Además, se usa también dicho test para contrastar algunas formas

Referencia principal	Ecuación del modelo
Versión continua de Ho y Lee (1986)[32]	$dr(t) = \alpha(t) dt + \beta dW(t)$
Black, Derman y Toy (1990)[6]	$d \ln r(t) = \left[\alpha(t) - \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} \right] dt + \beta(t) dW(t)$
Black y Karasinski (1991)[7]	$d \ln r(t) = \alpha_2(t) [\ln \alpha_1(t) - \ln r(t)] dt + \beta(t) dW(t)$
Hull y White (1990)[34]	$dr(t) = \alpha_2(t) [\alpha_1(t) - r(t)] dt + \beta(t) \sqrt{r(t)} dW(t)$

Tabla 2: Algunos modelos no homogéneos unifactoriales paramétricos.

funcionales paramétricas propuestas para el cuadrado de la volatilidad. En la Sección 5, siempre dentro del contexto no paramétrico, se estima el precio del riesgo de mercado y se usa el modelo estimado para valorar bonos cupón cero. Finalmente, se compara esta valoración de bonos con la que se obtiene imponiendo una deriva lineal y con la calculada bajo el modelo paramétrico CKLS. En la Sección 6 se exponen las conclusiones alcanzadas en este trabajo.

2. Los datos, un primer análisis

La variable subyacente en los modelos unifactoriales es el tipo de interés instantáneo libre de riesgo. Este tipo de interés es una variable no observable en los mercados financieros, lo que hace necesario que se deba usar una variable *proxy* para llevar a cabo el estudio empírico.

Para seleccionar la variable *proxy*, se debe elegir un plazo para el tipo de interés suficientemente corto para se acerque al concepto de tipo de interés instantáneo. Sin embargo, si se elige un plazo demasiado corto se pueden recoger movimientos no deseables debidos a la microestructura de los mercados. A este respecto, encontramos en la literatura financiera que lo usual es elegir tipos de interés interbancarios o de deuda publica (para garantizar que son libres de riesgo) con un plazo entre una semana y tres meses, siendo el más frecuente el mensual. Por ejemplo, Nowman (1977)[47] usa los tipos de interés interbancarios a un mes en Gran Bretaña y Chan *et al.*(1992)[14], Longstaff y Schwartz (1992)[44] y Vetzal (1997)[52] usan los tipos de interés de las letras del tesoro americanas a un mes. En el marco de la economía española, García (1998)[29] usa datos mensuales de los tipos de interés interbancarios a un mes para estudiar el modelo paramétrico propuesto en Chan *et al.*(1992)[14]. Otros ejemplos son: Andersen y Lund (1997)[1] y Stanton (1997)[49], que utilizan los tipos de interés de las letras del tesoro americanas a tres meses; Aït-Sahalia (1996)[4], que utiliza el tipo Eurodolar a siete días; Arapis y Gao (2006)[2], que usan también estos dos últimos tipos y Fernández (2001)[28], que usa los tipos interbancarios a siete días de la economía chilena.

Nuestra elección, atendiendo a los comentarios anteriores y con objeto de usar una serie de datos fácilmente accesible, es emplear la serie de datos semanales del tipo de interés interbancario a un mes anualizado en España. La serie usada, está formada por los datos desde enero de 1988 hasta mayo de 2006, lo que supone un total de 961 observaciones². La Figura 1 muestra la evolución de dicha serie temporal. Por otro lado, en la Figura 2 se representa su primera diferencia $\Delta r(t) = r(t) - r(t - 1)$, en la cual se observa una volatilidad de los tipos de interés cambiante con el tiempo.

En la Tabla 3 (columnas 2 y 3) se presentan algunas estadísticas básicas de la serie temporal $r(t)$ de los tipos interbancarios en cuestión y de su primera diferencia. Es destacable cómo las autocorrelaciones de este tipo de interés decrecen muy lentamente, persistencia que es típica en este tipo de series temporales. Para contrastar la estacionariedad de la serie se realiza el test aumentado de Dickey–Fuller, cuyo resultado conduce, al nivel de significatividad usual del 5 %, a rechazar la hipótesis nula de existencia de raíz unitaria y, por tanto, a aceptar la estacionariedad del proceso. Es importante tener en cuenta que se conoce que

²La serie se ha elaborado a partir de los datos disponibles en la página web del Banco de España, más concretamente en <http://www.bde.es/banota/series.htm>

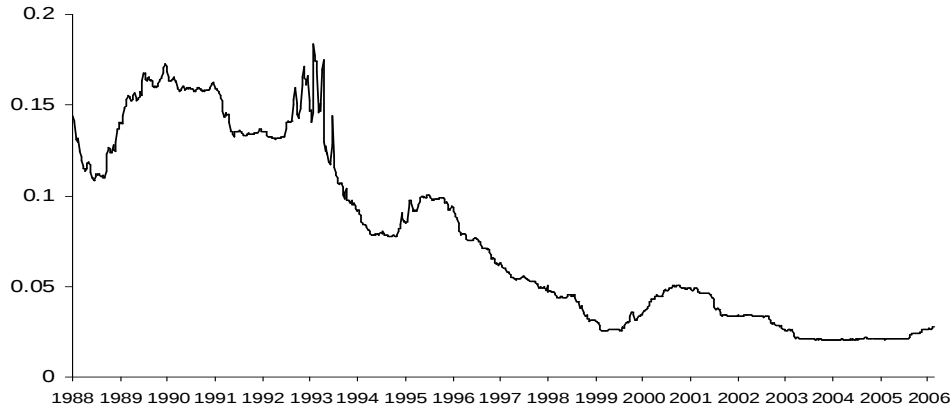


Figura 1: *Serie de datos semanales de los tipos de interés interbancarios en España a un mes anualizados, desde enero de 1988 hasta mayo de 2006.*

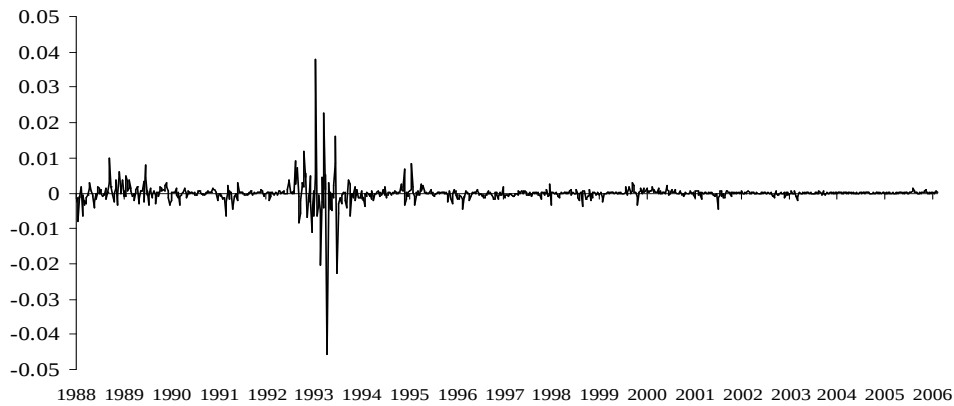


Figura 2: *Serie de la primera diferencia de los datos semanales de los tipos de interés interbancarios en España a un mes anualizados, desde enero de 1988 hasta mayo de 2006.*

el test tiene poca potencia, entonces, con un test tan conservador incluso un ligero rechazo significa que la estacionariedad de la serie es muy posible³.

Para valorar activos derivados de los tipos de interés por ausencia de arbitraje es necesario estimar el precio del riesgo de mercado. Teniendo en cuenta que dicho precio está relacionado con el exceso de retorno de los activos dependientes del tipo de interés, para obtener una aproximación se toman datos de un segundo activo: los tipos de interés interbancarios a una semana, cuyo valor en el instante t se denota por $r_2(t)$. Se consideran, como antes y procedentes de la misma fuente, datos semanales de tales tipos anualizados para el periodo enero de 1988 hasta mayo de 2006. La Tabla 3 (columnas 4 y 5) recoge las estadísticas básicas y el test de estacionariedad. Nótese como al nivel usual de significatividad del 5 %, también se acepta que este proceso es estacionario.

Es importante destacar, que el coeficiente de correlación lineal entre las dos series anteriores ascien-

³Para mayores detalles sobre el contraste aumentado de Dickey–Fuller y la significatividad de las autocorrelaciones se puede consultar Hamilton (1994)[31] y Box, Jenkins y Reinsel (1994)[9].

	$r(t)$	$\Delta r(t)$	$r_2(t)$	$\Delta r_2(t)$
media	0,07779	-0,00012	0,07743	-0,00012
desv. típica	0,05013	0,00286	0,04981	0,00306
mínimo	0,02029	-0,04577	0,01932	-0,04340
máximo	0,18394	0,03813	0,18481	0,03559
ρ_1	0,99695	0,06756	0,99659	0,03186
ρ_2	0,99373	-0,03933	0,99308	-0,11134
ρ_3	0,99066	-0,12055	0,99002	-0,10001
ρ_4	0,98819	-0,08187	0,98761	-0,08938
ρ_5	0,98600	-0,17857	0,98555	-0,09703
ρ_{10}	0,97704	0,01989	0,97635	0,03829
ρ_{15}	0,96451	0,03068	0,96330	0,00260
ρ_{20}	0,95135	0,04753	0,95016	-0,00971
ρ_{25}	0,93577	-0,08063	0,93425	-0,05672
ρ_{30}	0,92133	0,05715	0,91949	0,01283
Test aumentado de Dickey-Fuller				
Estadístico	-3,81205		-3,91769	
p-valor	0,01651		0,01203	

Tabla 3: Estadísticas básicas y test de estacionariedad de la serie de datos semanales de los tipos de interés interbancarios a un mes (columnas 2 y 3) y a una semana (columnas 4 y 5) en España. El estadístico de los test de estacionariedad es $\frac{\hat{\gamma}-1}{ES(\hat{\gamma})}$, donde $\hat{\gamma}$ es el estimador por mínimos cuadrados ordinarios y $ES(\hat{\gamma})$ su error estándar del correspondiente parámetro del modelo $r(t) = \alpha + \beta \cdot t + \gamma \cdot r(t-1) + \sum_{j=1}^p \delta_j \cdot \Delta r(t-j) + \varepsilon(t)$. El número de retardos incluidos en los dos casos en el modelo es $p = 24$, en base a que en el correlograma de las series $\Delta r(t)$ y $\Delta r_2(t)$ se observa que las autocorrelaciones con retardo superior a 24 no son significativas al 5 %, y esto mismo no ocurre con ningún retardo inferior a 24.

de a 0,99952, lo que muestra alguna evidencia en favor⁴ de que las dos series están positivamente y perfectamente correladas como se supone que ocurre en el marco de los modelos unifactoriales.

Continuamos en adelante trabajando con la serie principal $r(t)$ de datos semanales de los tipos de interés interbancarios a un mes, ya que es la que se va a usar para la modelización de los tipos de interés instantáneos libres de riesgo. En concreto, una estimación no paramétrica de su densidad estacionaria se obtiene aplicando el método del Núcleo⁵, dado un núcleo $K(\cdot)$, mediante

$$\hat{f}(r) = \frac{1}{nh} \sum_{t=1}^n K\left(\frac{r - r(t)}{h}\right), \quad r \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

donde el parámetro h es la anchura de la ventana, la cual controla la suavidad del estimador $\hat{f}(\cdot)$. Así, para obtener una estimación de la densidad se debe elegir un núcleo $K(\cdot)$ y una anchura de ventana h . Algunos resultados teóricos prueban que la elección del núcleo no es importante desde el punto de vista del error asintótico de estimación y se suele elegir atendiendo a otras consideraciones como diferenciabilidad o esfuerzo computacional asociado a su cálculo. Un núcleo muy usado en la práctica, y el que se usa siempre en este trabajo, es el gaussiano; en el que $K(\cdot)$ es la densidad de la distribución normal estándar. En cuanto a la anchura de la ventana h , su elección es de gran importancia para la

⁴Más teniendo en cuenta que la correlación se mantiene en este orden para los otros plazos de los tipos de interés interbancarios en España.

⁵Una referencia fundamental en lo referente a estimación no paramétrica de densidades es Silverman (1986)[48].

precisión del estimador, ya que éste es muy sensible a la elección de h . En el caso en que la verdadera densidad es gaussiana y se usa un núcleo gaussiano, la elección óptima desde el punto de vista de obtener un menor error cuadrático integrado medio viene dada por $h = 1,06 \cdot S \cdot n^{-\frac{1}{5}}$, donde S es una estimación de la desviación estándar de la distribución y n el número de observaciones. Sin embargo, tal elección lleva a una densidad estimada demasiado suave cuando las verdaderas densidades son multimodales y asimétricas. Según Silverman (1986)[48], la siguiente elección produce mejores resultados para una gran variedad distribuciones:

$$h = 0,9 \cdot \min \left\{ S, \frac{R_Q}{1,34} \right\} n^{-\frac{1}{5}}, \quad (3)$$

siendo R_Q el recorrido intercuartílico de los datos.

Para la serie de datos que nos ocupa, este método⁶ lleva a tomar $h = 0,0114$. La Figura 3 presenta la estimación obtenida. Además, se han representado bandas puntuales de confianza al 95 %, obtenidas utilizando el método bootstrap de bloques móviles desarrollado en Künsch (1989)[38] y Liu y Singh (1992)[43]. Este método, al captar la dependencia débil entre las observaciones, logra mejores resultados que los conseguidos con la clásica normalidad asintótica del estimador.

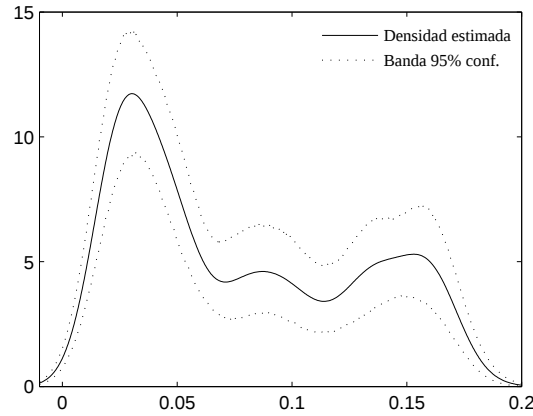


Figura 3: Densidad incondicional estimada de los tipos de interés a corto plazo en España y bandas puntuales de confianza al 95 % basadas en el método bootstrap de bloques móviles con 5000 replicaciones.

Como conclusión más destacable, se tiene que la densidad estimada multimodal obtenida para los tipos de interés a corto plazo en la Figura 3 no invita a pensar que la dinámica de tales tipos de interés obedezca a modelos simples, como por ejemplo los modelos gaussianos.

3. Una modelización no paramétrica

Uno de los enfoques más generales para estimar la ecuación diferencial homogénea (1) se encuentra en Stanton (1997)[49]. La idea fundamental en este trabajo se basa en desarrollar la esperanza condicionada $\mathbb{E}_t[f(r(t + \Delta), t + \Delta)]$ de forma similar a un desarrollo en serie de Taylor, donde $f(\cdot, \cdot)$ es una función

⁶Existen métodos más refinados para encontrar una anchura de ventana deseable, los cuales hemos observado que en nuestro caso de estudio no producen mejores resultados respecto a la elección dada por la ecuación (3).

arbitraria que se elige convenientemente para construir aproximaciones de $\mu(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ y Δ es el paso de tiempo entre observaciones sucesivas.

En concreto, para obtener aproximaciones de primer, segundo y tercer orden a la deriva se elige $f(r, t) = r$, llegando a:

$$\mu(r(t)) = \frac{1}{\Delta} \mathbb{E}_t[r(t + \Delta) - r(t)] + O(\Delta) \quad (4)$$

$$\mu(r(t)) = \frac{1}{2\Delta} \{4\mathbb{E}_t[r(t + \Delta) - r(t)] - \mathbb{E}_t[r(t + 2\Delta) - r(t)]\} + O(\Delta^2) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mu(r(t)) &= \frac{1}{6\Delta} \{18\mathbb{E}_t[r(t + \Delta) - r(t)] - 9\mathbb{E}_t[r(t + 2\Delta) - r(t)] \\ &\quad + 2\mathbb{E}_t[r(t + 3\Delta) - r(t)]\} + O(\Delta^3). \end{aligned} \quad (6)$$

Para obtener las aproximaciones a $\sigma^2(r(t))$ se toma $f(r, t) = (r - r(t))^2$ y se llega a:

$$\sigma^2(r(t)) = \frac{1}{\Delta} \mathbb{E}_t[(r(t + \Delta) - r(t))^2] + O(\Delta) \quad (7)$$

$$\sigma^2(r(t)) = \frac{1}{2\Delta} \{4\mathbb{E}_t[(r(t + \Delta) - r(t))^2] - \mathbb{E}_t[(r(t + 2\Delta) - r(t))^2]\} + O(\Delta^2) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(r(t)) &= \frac{1}{6\Delta} \{18\mathbb{E}_t[(r(t + \Delta) - r(t))^2] - 9\mathbb{E}_t[(r(t + 2\Delta) - r(t))^2] \\ &\quad + 2\mathbb{E}_t[(r(t + 3\Delta) - r(t))^2]\} + O(\Delta^3). \end{aligned} \quad (9)$$

Tomando raíces cuadradas a ambos lados de cada una de las tres ecuaciones anteriores se obtienen aproximaciones a la volatilidad $\sigma(r(t))$. Nótese como las aproximaciones de orden uno se deducen fácilmente a partir de la discretización intuitiva de Euler de la ecuación (1), dada por $\Delta r(t) = \mu(r(t)) \Delta t + \sigma(r(t)) \sqrt{\Delta t} \cdot Z_t$, siendo Z_t una variable aleatoria normal estándar.

Así, para construir estimaciones de la deriva o la volatilidad basta usar un método apropiado para, dadas dos variables X e Y , estimar la esperanza condicionada

$$\mathbb{E}[Y|X = x] = m(x). \quad (10)$$

En particular, para obtener la aproximación de orden 1 a la deriva de los tipos de interés a corto plazo en España a partir de las observaciones semanales de los tipos de interés interbancarios a un mes $r(t)$ se debe estimar la esperanza condicionada $\mathbb{E}[r(t + \Delta) - r(t)|r(t) = r]$ con $\Delta = \frac{1}{50}$, lo que corresponde a determinar la línea de regresión de la nube de puntos representada en la Figura 4, donde se muestran los cambios semanales del tipo de interés $r(t + 1) - r(t)$ en función del tipo de interés de la primera semana $r(t)$ para $t = 1, \dots, n - 1$. A partir de la Figura 4 se observa cierta evidencia de heteroscedasticidad, ya que se aprecian mayores variaciones cuando los tipos son más altos.

En el contexto general de la regresión no lineal de una variable Y sobre una variable X , ecuación (10), un estimador comúnmente usado para $m(x)$ es el obtenido por el método del núcleo, llamado estimador

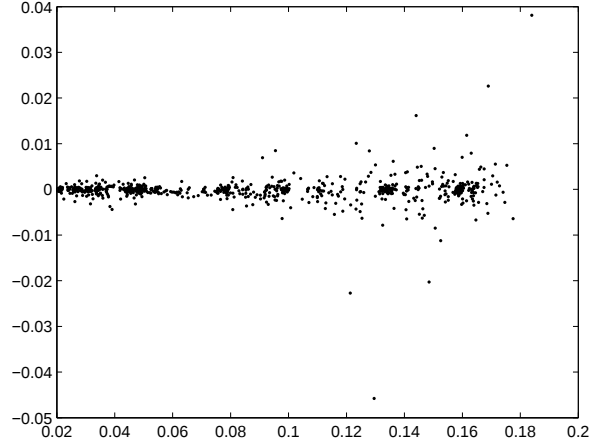


Figura 4: Nube de puntos de la primera diferencia de los datos semanales de los tipos de interés interbancarios a un mes en España frente a su nivel inicial.

de Nadaraya-Watson, y que viene dado por:

$$\hat{m}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n y_i K\left(\frac{x_i - x}{h}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x_i - x}{h}\right)} = \sum_{i=1}^n y_i w_i(x). \quad (11)$$

De esta manera, el estimador de $m(x)$ es una media aritmética ponderada de las respuestas observadas y_i , donde cada ponderación $w_i(x)$ depende de todo el vector de observaciones X y es mayor cuanto más cerca está x_i de x .

Nuevamente, para poder llevar a cabo esta estimación es necesario especificar un núcleo $K(\cdot)$ y una anchura de la ventana h , que controla el grado de suavidad de la función estimada $\hat{m}(x)$. Al igual que en el caso de la estimación de la densidad, la elección del núcleo no es una cuestión crítica para la precisión del estimador y continuamos usando el núcleo gaussiano. Sin embargo, la elección de una anchura de ventana adecuada si es de gran importancia (ver Härdle (1990)[33]). Una selección asintóticamente óptima es la que se obtiene mediante el llamado *método de validación cruzada*, minimizando la expresión siguiente⁷:

$$CV(h) = \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{m}_{-i}(x_i)]^2, \quad (12)$$

donde $\hat{m}_{-i}(x_i)$ es el estimador de $m(x_i)$ que se obtiene excluyendo la observación (x_i, y_i) . Una sencilla manipulación de la expresión anterior (12) prueba que se puede escribir también en la siguiente forma,

⁷En esta cantidad suele aparecer en la literatura al respecto un factor $\alpha(x_i)$ adicional en el sumatorio. Esta función peso se suele usar para excluir del correspondiente cálculo un determinado porcentaje de observaciones extremas en la distribución. En este trabajo se ha optado por incluir todas las observaciones en los cálculos ya que, tras diversas elecciones de esta función, hemos comprobado ninguna de ellas mejora los resultados obtenidos.

más conveniente desde el punto de vista computacional:

$$CV(h) = \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{m}(x_i)]^2 \cdot \Xi(w_i(x_i)), \quad (13)$$

donde $\Xi(u) = (1 - u)^{-2}$ y $w_i(x_i) = \frac{K(0)}{\sum_{j=1}^n K\left(\frac{x_i - x_j}{h}\right)}$.

Así, el método de validación cruzada se puede interpretar también como la minimización de una suma de cuadrados de residuos ponderada, donde los valores pequeños de h se penalizan mediante la inclusión de la función $\Xi(\cdot)$, Härdle (1997)[33].

En la Figura 5 aparecen representadas las funciones $CV(h)$ correspondientes a las aproximaciones de orden uno de la deriva y del cuadrado de la volatilidad, ecuaciones (4) y (7), para los datos considerados. Los valores óptimos obtenidos con este criterio son $h = 0,0068$ para la aproximación de la deriva y $h = 0,0372$ para la del cuadrado de la volatilidad.

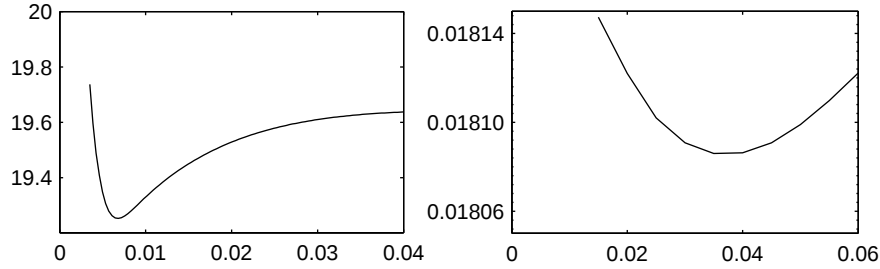


Figura 5: Determinación de la anchura de la ventana mediante validación cruzada para la regresión no paramétrica conducente a la aproximación de orden uno de la deriva (derecha) y del cuadrado de la volatilidad (izquierda) para los tipos de interés a corto plazo en España. Los valores mínimos se alcanzan con $h = 0,0068$ para la deriva y con $h = 0,0372$ para el cuadrado de la volatilidad.

Llegados a este punto, estamos en condiciones de obtener las aproximaciones de orden uno, dos y tres a la deriva y a la volatilidad a partir de las expresiones (4)-(5)-(6) y (7)-(8)-(9). Para ello, usando un núcleo gaussiano y las anchuras de ventana obtenidas por el método de validación cruzada⁸ en (13), se estima la esperanza condicionada en (10) con los datos apropiados en cada caso usando el estimador de Nadaraya-Watson (11). La Figura 6 recoge todas estas estimaciones.

Lo primero a destacar es que las tres aproximaciones, tanto para la deriva como para la volatilidad, son muy similares, que es precisamente lo que cabe esperar que ocurra cuando los errores de aproximación son pequeños. Respecto a las propiedades teóricas de las aproximaciones, es importante tener en cuenta que Fan y Zhan (2003)[25], en una revisión del artículo de Stanton (1997)[49], encuentran que aunque el uso de las aproximaciones de orden superior reduce el sesgo asintótico de los estimadores, tiene el efecto de que la varianza asintótica crece casi exponencialmente con el orden de la aproximación. Este

⁸Señalar que también hemos considerado otras opciones planteadas en la literatura. En concreto, algunos autores toman una anchura de ventana *ad-hoc* de orden $O\left(n^{-\frac{1}{5}}\right)$, que es el óptimo. Teniendo en cuenta las elecciones en Stanton (1997)[49], Chapman y Pearson (2000)[15] y Arapis y Gao (2006)[2], se ha probado con las anchuras de ventana $0'1 n^{-\frac{1}{5}}$, $0'25 n^{-\frac{1}{5}}$, h_0 y $4 h_0$, donde $h_0 = S \cdot n^{-\frac{1}{5}}$. Hemos comprobado que ninguna de ellas mejora los resultados obtenidos a partir del método de validación cruzada.

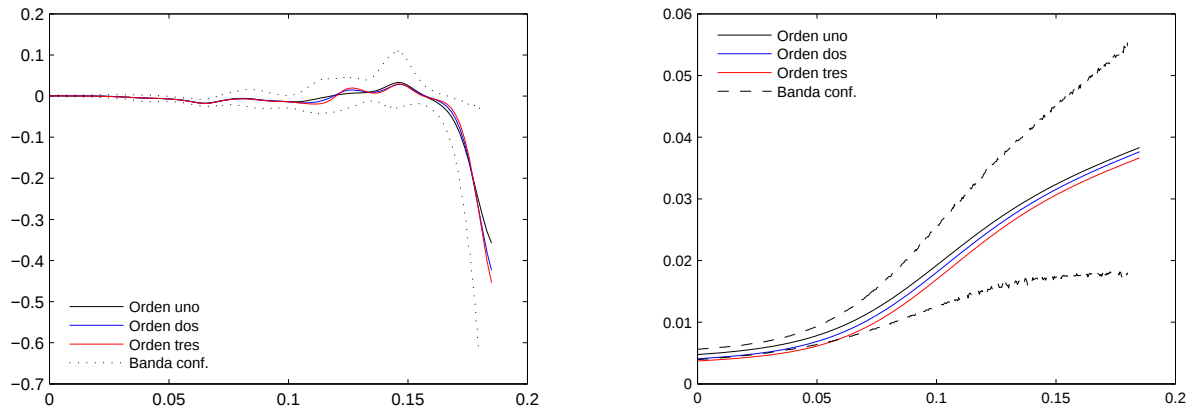


Figura 6: Aproximaciones de primer, segundo y tercer orden de la deriva (derecha) y volatilidad (izquierda) de la difusión propuesta como modelo de evolución de los tipos de interés a corto plazo en España. Se añaden además bandas puntuales de confianza al 95 % para las aproximaciones de primer orden construidas mediante el método bootstrap de los bloques móviles.

resultado teórico ensombrece el uso de aproximaciones de orden superior en la estimación de difusiones. Por tanto, teniendo en cuenta este resultado teórico y las estimaciones obtenidas en particular con los datos de la economía española, decidimos trabajar con las aproximaciones de orden uno.

En la Figura 6 se muestran, además, bandas puntuales al 95 % de confianza construidas mediante el método bootstrap de bloques móviles⁹. Estas bandas de confianza, tanto para la deriva como para la volatilidad, son bastante estrechas para tipos de interés bajos y medios, donde se dispone de muchas observaciones. Sin embargo, para tipos de interés altos, donde las observaciones son escasas, las bandas de confianza se hacen mucho más anchas reflejando una menor confianza en las estimaciones.

A la vista de la Figura 6, se puede señalar que la estimación de la deriva es no lineal, mostrando una ligera reversión a la media para tipos de interés medios y bajos y cayendo fuertemente cuando los tipos de interés se sitúan por encima del 15 %. Este comportamiento aparentemente no lineal en la deriva es el mismo que aparece en otros trabajos (Stanton (1997)[49], Jiang (1998)[35], Fernández (2001)[28] y Corzo y Gómez (2001)[17] entre otros). Estos autores concluyen, quizás algo precipitadamente, a partir de las estimaciones que existe evidencia de no linealidad en la deriva. Sin embargo, Chapman y Pearson (2000)[15] analizan el comportamiento muestral del estimador de la deriva y prueban, usando como referencia el modelo CIR (ver Tabla 1), que aunque la verdadera deriva sea lineal el estimador muestra una no linealidad precisamente como la exhibida en la Figura 6. En este trabajo, se profundiza en este aspecto, considerando más adelante la estimación lineal local y contrastes de hipótesis adecuados.

Con respecto a la estimación de la volatilidad, se observa en la Figura 6 que en general aumenta conforme los tipos de interés son mayores. Por tanto, no está en consonancia con la volatilidad constante propuesta por ejemplo en Vasicek (1977)[51], sino más bien con la volatilidad de tipo potencial del modelo CKLS. En la sección siguiente, se validan estas afirmaciones contrastando estas formas paramétricas para la volatilidad de los tipos de interés a corto plazo en España.

⁹El tamaño de los bloques que se ha elegido en ésta y en las estimaciones posteriores basadas en este método es 50, lo que corresponde a un año de observaciones semanales.

Todas estas conclusiones sobre la deriva y la volatilidad de los tipos de interés a corto plazo en España estimada a partir de datos semanales de tipos de interés interbancarios en España coinciden con las obtenidas en Gavilán y Alba (2003)[30] a partir de la misma serie pero con una frecuencia de observación diaria.

Respecto a la forma particular que presenta la deriva estimada, ésta es estudiada en Chapman y Pearson (2000)[15]. La conclusión principal a la que llegan estos autores es que este tipo particular de no linealidad, puede ser espúrea y deberse al comportamiento del estimador no paramétrico en la frontera, donde las observaciones son más escasas y hay un mayor sesgo.

A este respecto, la regresión lineal local, estimador que generaliza al de Nadaraya-Watson y que presenta un menor sesgo asintótico y un mejor comportamiento en la frontera (Fan y Gibels (1995)[26]), ofrece para los datos considerados una estimación de la deriva muy similar a la de la Figura 6. En consecuencia, no hay diferencia significativa en la estimación al usar el estimador localmente lineal frente al de Nadaraya-Watson. Este resultado no nos permite avanzar en la obtención de alguna evidencia respecto a si la no linealidad que muestra la deriva estimada es espúrea, debida al proceso de estimación, o implicada por los datos. Este hecho está en acuerdo con Chapman y Pearson (2000)[15], donde se afirma, tras un estudio con datos simulados, que este tipo de no linealidad exhibida se debe más al truncamiento en la frontera superior de cualquier muestra por ser finita (sesgo que aparece en la cola derecha de la distribución), que al conocido sesgo en la frontera.

La sección siguiente se dedica a profundizar en este interesante e importante aspecto de la aparente no linealidad de la deriva del modelo planteado.

4. Contrastes de hipótesis sobre la deriva y la volatilidad

En la sección anterior se ha obtenido una estimación no lineal de la deriva de los tipos de interés a corto plazo en España (Figura 6). Esta peculiar forma estimada de la deriva ha llevado a algunos autores, como por ejemplo Stanton (1997)[49], Jiang (1998)[35], Fernández (2001)[28] y Corzo y Gómez (2001)[17], a afirmar que la deriva de la difusión que modeliza los tipos instantáneos libres de riesgo en cada caso que analizan es no lineal. Sin embargo, parece algo precipitado afirmar tal no linealidad usando únicamente la estimación, y más teniendo en cuenta que las bandas de confianza son más anchas (indicando una menor precisión en las estimaciones) para los tipos de interés más altos, que es precisamente donde se apoya la afirmación de no linealidad de la deriva. Además, Chapman y Pearson (2000)[15] sugieren que la no linealidad podría ser espúrea, debida a los sesgos ya mencionados en la sección anterior: El sesgo en la frontera de la regresión núcleo y el sesgo de truncamiento en el límite superior que aparece al usar muestras finitas. En este sentido, con los datos considerados de la Economía española, hemos comprobado que el uso de una regresión lineal local para estimar la deriva, la cual tiene mejores propiedades teóricas en cuanto al sesgo en la frontera que la regresión núcleo, no aporta más información a este respecto que la estimación más simple de Nadaraya-Watson.

Todas las afirmaciones realizadas en las secciones previas sobre la deriva de los tipos de interés a corto plazo en España, y las que hacen los autores más arriba mencionados tras un estudio no paramétrico a

partir de otras series de datos, se apoyan fundamentalmente en estimaciones y representaciones gráficas. Para justificar si la deriva estimada se aparta significativamente de la linealidad, es conveniente disponer de un test de hipótesis adecuado. Recientemente, se han desarrollado dos test de especificación de modelos no paramétricos, los cuales se pueden usar para contrastar la linealidad de la deriva del modelo unifactorial continuo (1): El test de razón de verosimilitud generalizado (conocido como test GLR) de Fan, Zhang y Zhang (2001)[24] y el test de especificación de modelos no paramétricos (conocido como test J_n) de Li (1994)[39] y Zheng (1996)[53].

La versión bootstrap del test GLR es considerada en Fan y Zhang (2003)[25], quienes argumentan que es un método potente para testar especificaciones paramétricas de varios modelos unifactoriales continuos. Sin embargo, Kim y Wang (2006)[37] estudian las versiones bootstrap de los dos test anteriores y encuentran, mediante experimentos de simulación, que la versión bootstrap del test GLR realizar el test sobre la linealidad deriva en algunos modelos continuos no proporciona tamaños estables sobre un rango de anchuras de ventana, lo que dificulta el análisis de la potencia del test. Además, aplicar, como se hace en el test J_n , el método bootstrap salvaje en el test GLR lleva a resultados similares a los de el bootstrap ordinario. Los propios Fan y Zhang (2003)[25] (pág. 127) señalan que la justificación rigurosa de que el test GLR se puede aplicar a datos de series temporales no sido aún proporcionada. Por otra parte, el test J_n no adolece de ninguno de estos defectos, ya que Fan y Li (1997)[27] y Li (1999)[40] prueban que el test es aplicable a datos de series temporales y Kim y Wang (2006)[37] demuestran, mediante experimentos de simulación con los modelos CIR y CKLS¹⁰, que el tamaño del test es estable sobre un rango de anchuras de ventana.

Teniendo en cuenta todos los comentarios anteriores respecto la situación actual de los contrastes sobre la deriva aplicables en los modelos unifactoriales, descartamos el test GLR y pasamos a describir brevemente y a aplicar los datos considerados el test J_n .

En la sección anterior se comenta la conveniencia de trabajar con las aproximaciones de orden uno a la deriva y al cuadrado de la volatilidad del modelo unifactorial continuo planteado en la ecuación(1). En base esta aproximación a la deriva, ecuación (4), se puede considerar el siguiente modelo de regresión:

$$Y(t) = \mu(X(t)) + v(t), \quad t = 1, \dots, n-1, \quad (14)$$

donde $Y(t) = \frac{r(t+\Delta)-r(t)}{\Delta}$, $X(t) = r(t)$ y $v(t)$ son los términos de error, verificando $\mathbb{E}(v(t)|X(t)) = 0$.

Para contrastar la hipótesis de un modelo paramétrico en la regresión (14), se consideran las siguientes hipótesis nula y alternativa:

$$\begin{aligned} H_0 : \quad & \mu(x) = g(x, \beta), \\ H_1 : \quad & \mu(x) \neq g(x, \beta), \end{aligned} \quad (15)$$

donde $g(x, \beta)$ es una función conocida dependiente de un parámetro desconocido β . En concreto, estamos especialmente interesados en contrastar la linealidad de la deriva, es decir, en la especificación $g(x, \beta) = \beta_1 + \beta_2 x$.

¹⁰Ver Tabla 1. Este segundo es uno de los modelos unifactoriales paramétricos más generales que se han planteado para la dinámica de los tipos de interés a corto plazo.

El test J_n usa una estimación núcleo de $\mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} [e(t)|X(t)]^2 f(X(t)) \right\} \geq 0$, siendo e el término error en la regresión $Y(t) = g(X(t), \beta) + e(t)$ y f la función de densidad de $X(t)$. En la desigualdad anterior se da la igualdad cuando H_0 es cierta. En la práctica, se usa $\hat{e}(t)$ en lugar de $e(t)$, donde $\hat{e}(t) = Y(t) - g(X(t), \hat{\beta})$ es un residuo y $\hat{\beta}$ es un estimador de β obtenido por mínimos cuadrados ordinarios. Usando el estimador núcleo que deja una observación fuera (*leave one out*), el test estadístico se basa en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{e}(t) \left\{ \frac{1}{nh} \sum_{u=1, u \neq t}^n \hat{e}(u) \cdot K\left(\frac{X(u)-X(t)}{h}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{n^2 h} \sum_{t=1}^n \sum_{u=1, u \neq t}^n \hat{e}(t) \hat{e}(u) \cdot K\left(\frac{X(u)-X(t)}{h}\right), \end{aligned} \quad (16)$$

donde K es una función de densidad acotada y simétrica.

Bajo algunas condiciones de regularidad, Li y Wang (1998)[41] prueban que:

- Se tiene una distribución asintótica normal; más concretamente, bajo H_0

$$J_n = \frac{n\sqrt{h}I_n}{\sqrt{\hat{\Omega}^2}} \rightarrow N(0, 1)$$

donde $\hat{\Omega}^2 = \frac{2}{n^2 h} \sum_{t=1}^n \sum_{u=1, u \neq t}^n \hat{e}(t)^2 \hat{e}(u)^2 \cdot K\left(\frac{X(u)-X(t)}{h}\right)^2$ es un estimador consistente del parámetro

$$\Omega^2 = 2\mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} (e(1)^2 | X(1))^2 f(X(1)) \right\} \left\{ \int k^2(s) ds \right\}.$$

- El test J_n es un test consistente; más concretamente, bajo H_1 se tiene que $\mathbb{P}(J_n > c_n) \rightarrow 1$ para cualquier sucesión no estocástica $c_n = o(n\sqrt{h})$.

Li y Wang (1998)[41] recomiendan no usar la distribución normal estándar anterior, ya que comprueban mediante estudios de simulación que incluso con $n = 1000$ el estadístico J_n aun no está cerca de dicha distribución asintótica. En su lugar, recomiendan usar el método bootstrap, especialmente el bootstrap salvaje. Estos autores prueban que el método bootstrap salvaje lleva a aproximaciones válidas a la distribución de J_n bajo H_0 incluso cuando los términos de error en el modelo de regresión son heteroscedásticos.

En definitiva, las etapas para obtener el p -valor del test J_n son las siguientes:

Etapas 1: Estimar la regresión $Y(t) = g(X(t), \beta) + e(t)$ por mínimos cuadrados ordinarios y obtener los residuos $\hat{e}(t) = Y(t) - g(X(t), \hat{\beta})$ y el estadístico J_n .

Etapas 2: Generar los errores bootstrap $e^*(t)$ usando el método bootstrap salvaje; es decir

$$e^*(t) = \begin{cases} a \cdot \hat{e}(t) & \text{con probabilidad } p = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \\ b \cdot \hat{e}(t) & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases},$$

donde $a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Etapas 3: Obtener $Y^*(t) = g(X(t), \hat{\beta}) + e^*(t)$. La muestra resultante $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^*)$ se llama muestra bootstrap. Calcular los residuos bootstrap $\hat{e}^*(t) = Y^*(t) - g(X(t), \hat{\beta}^*)$, donde $\hat{\beta}^*$ es el estimador por

Anchura de Ventana	Estadístico J_n	p-valor
$h_1 = 0,0063$	0,7992	0,1566
$h_2 = 0,0127$	1,0451	0,0412
$h_3 = 0,0190$	0,6044	0,0396
$h_{CV} = 0,0068$	0,8647	0,1315

Tabla 4: Resultados del test J_n con 5000 replicaciones bootstrap para contrastar la linealidad de la deriva en la dinámica de los tipos de interés a corto plazo en España.

mínimos cuadrados de β usando la muestra bootstrap $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^*)$.

Etapas 4: Usar los residuos bootstrap para calcular el estadístico $J_n^* = \frac{n\sqrt{h}I_n^*}{\sqrt{\hat{\Omega}^{*2}}}$, donde I_n^* y $\hat{\Omega}^{*2}$ son los anteriores I_n y $\hat{\Omega}^2$ reemplazando los residuos $\hat{e}(t)$ por los residuos bootstrap $\hat{e}^*(t)$ obtenidos en la etapa anterior.

Etapas 5: Repetir las etapas 2–4 un número suficientemente grande de veces para obtener la distribución empírica del estadístico J_n^* . Esta distribución se llama distribución bootstrap y se usa para aproximar la distribución en muestras finitas del estadístico J_n bajo H_0 . Por tanto, la proporción de veces que ocurre que $J_n < J_n^*$ es el p -valor aproximado de J_n .

Para aplicar el test J_n a los datos considerados, se debe elegir una anchura de ventana. Kim y Wang (2006)[37], usan los valores $h_j = j \cdot S \cdot n^{-1/5}$, con $j = 0,5, 1$ y $1,5$, siendo n el número de datos y S su desviación estándar. Tales valores, tratan de representar uno pequeño, uno mediano y uno grande respectivamente. Estas anchuras de ventana *ad hoc*, asintóticamente óptimas, se suelen usar al investigar los tamaños y potencias de los test, evitando otras como la validación cruzada mínimo-cuadrática por cuestiones de coste computacional. En este trabajo, también se usa esta cuarta anchura de ventana en todos los contrastes realizados. Los resultados de aplicar este test para contrastar la no linealidad de la deriva que modeliza la dinámica de los tipos de interés a corto plazo en España, usando los datos semanales de los tipos de interés interbancarios a un mes, las cuatro anchuras de ventana antes mencionadas y 5000 replicaciones bootstrap de la muestra original, aparecen en la Tabla 4. La deriva lineal estimada en este caso viene dada por $g(x, \hat{\beta}) = 0,001807 - 0,101022x$.

Al contrario de lo que sería deseable, se observa en la Tabla 4 cierta variación del p -valor del contraste para las diferentes anchuras de ventana consideradas. Esto nos lleva a hacer un análisis más profundo, efectuando los cálculos anteriores para todo un rango de anchuras de ventana que incluye a las anteriores. La Figura 7 muestra los p -valores obtenidos para anchuras de ventana en el intervalo $[0'006, 0'050]$, la línea horizontal corresponde al usual 5% de significatividad. Observamos que la mayoría de los p -valores se sitúan por encima de la línea del 5% de significatividad, llevando a que no existen evidencias para rechazar la hipótesis nula de linealidad de la deriva. Sólo unas pocas elecciones (entre las que se encuentran h_2 y h_3) conducen a p -valores inferiores a 0,05. Además todos los p -valores se sitúan por encima del 3% (el más pequeño observado es 0'0314). Como resultado importante, se puede concluir que no existe una evidencia contundente que conduzca a rechazar la hipótesis de linealidad de la deriva.

Por otro lado, en la sección anterior se afirma que la volatilidad estimada induce a pensar que se ajusta a la forma potencial especificada en el modelo paramétrico CKLS (ver Figura 6). Podemos contrastar formas específicas del cuadrado de la volatilidad usando el test J_n sin más que tener en cuenta su

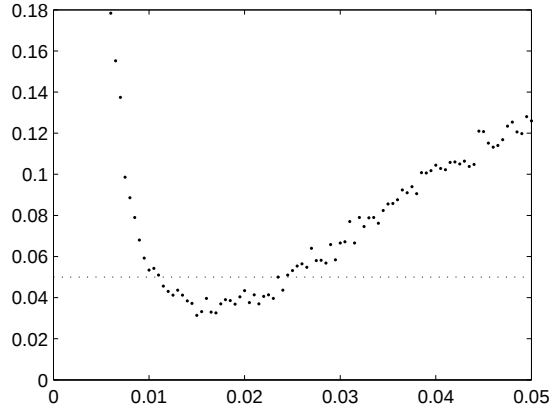


Figura 7: *P-valores del test J_n para contrastar la linealidad de la deriva de los tipos de interés a corto plazo en España en función del valor de la anchura de la ventana. La línea horizontal representa el usual 5 % de significatividad.*

aproximación de orden uno de la ecuación (7). En concreto, tomando ahora $Y(t) = \frac{[r(t+\Delta)-r(t)]^2}{\Delta}$ y $X(t) = r(t)$, la regresión (14) se convierte en $Y(t) = \sigma^2(X(t)) + e(t)$, $t = 1, \dots, n-1$.

Los resultados del contraste de un cuadrado de la volatilidad constante como en el modelo de Vasicek (1977)[51] y de la forma paramétrica potencial especificada por el modelo CKLS aparece en la Tabla 5. En este caso, hay un claro rechazo de una volatilidad constante y no se rechaza, a los niveles usuales de significatividad, una forma paramétrica potencial para la volatilidad, en acuerdo con lo que aparentemente se deduce a partir de las estimaciones obtenidas en la sección anterior. La volatilidad estimada mediante mínimos cuadrados no lineales resulta ser, para los datos considerados, $\hat{\sigma}(x) = 0,241450x^{1,430828}$.

Anchura de Ventana	$H_0 : \sigma^2(x) = cte$		$H_0 : \sigma^2(x) = \sigma^2 x^{2\gamma}$	
	Estadístico J_n	p-valor	Estadístico J_n	p-valor
$h_1 = 0,0063$	4,4245	0,0000	2,5043	0,137
$h_2 = 0,0127$	5,1567	0,0000	0,2548	0,201
$h_3 = 0,0190$	5,5250	0,0000	-0,3810	0,232
$h_{CV} = 0,0372$	4,7032	0,0000	-0,3598	0,184

Tabla 5: *Resultados del test J_n con 1000 replicaciones bootstrap para contrastar un cuadrado de la volatilidad constante y potencial.*

5. Aplicación a la valoración de bonos: Comparación de diferentes modelos

Una vez establecido y estimado el modelo unifactorial dado por la ecuación diferencial estocástica (1) para el tipo de interés instantáneo libre de riesgo, podemos plantearnos usarlo para una de sus aplicaciones fundamentales: La valoración de activos derivados de los tipos de interés. Para ello, sólo queda estimar precio del riesgo de mercado. Con esta finalidad, se usa la metodología no paramétrica propuesta en Jiang (1998)[35] para realizar una estimación de la forma $\lambda(r(t)) = \lambda_0(r(t)) \cdot \sigma(r(t))$, la

cual conduce a un modelo libre de arbitraje.

Con este objetivo, y teniendo en cuenta que el precio del riesgo de mercado $\lambda_0(r(t))$ está relacionado con el exceso de rendimiento de los activos dependientes de los tipos de interés, Jiang (1998)[35] considera los rendimientos de dos bonos cupón cero $R_{T_i}(t, r(t))$, siendo $r(t)$ el nivel de los tipos de interés a corto plazo y T_i el instante de vencimiento del activo i , con $i = 1, 2$. Suponiendo que las dinámicas de tales rendimientos vienen también dadas por ecuaciones diferenciales estocásticas homogéneas, en concreto

$$dR_{T_i}(r(t)) = \xi_{T_i}(r(t)) dt + \nu_{T_i}(r(t)) dW(t), \quad (17)$$

se deduce la expresión siguiente:

$$\lambda_0(r(t)) = \frac{R^d(r(t), \tau_1, \tau_2) + \tau_2 \xi_{T_2}(r(t)) - \tau_1 \xi_{T_1}(r(t)) + \frac{1}{2} [\tau_1^2 \nu_{T_1}^2(r(t)) - \tau_2^2 \nu_{T_2}^2(r(t))]}{\tau_2 \nu_{T_2}(r(t)) - \tau_1 \nu_{T_1}(r(t))}, \quad (18)$$

donde $\tau_i = T_i - t$, $i = 1, 2$ son los tiempos hasta los vencimientos de cada activo y $R^d(r(t), \tau_1, \tau_2)$ es el diferencial del rendimiento entre ambos activos. En consecuencia, para obtener una aproximación al precio del riesgo de mercado, basta elegir dos instantes de vencimiento cualquiera T_1 y T_2 y estimar la deriva y la volatilidad de los procesos de los rendimientos a vencimiento $R_{T_i}(t, r(t))$, para $i=1,2$, mediante la regresión núcleo.

Para realizar tal estimación con datos de los tipos de interés interbancarios en España, se toman datos semanales de los rendimientos a un mes ($T_1 = \frac{1}{12}$) y de los rendimientos a una semana ($T_2 = \frac{1}{50}$) y se estiman los procesos de los rendimientos a vencimiento (17) mediante una aproximación de orden uno, usando la regresión núcleo con un núcleo gaussiano¹¹. En la Figura 8 aparece dicha estimación, junto con una banda de confianza puntual al 95 % obtenida por el método bootstrap de bloques móviles.

Respecto a estas estimaciones cabe hacer las siguientes apreciaciones:

- Es no nulo globalmente, siendo cercano a cero para tipos de interés bajos y medios y decreciendo fuertemente conforme los tipos de interés aumentan. Por tanto, exhibe un comportamiento bastante diferente del que cabría esperar bajo algunas funciones paramétricas propuestas con anterioridad (por ejemplo, constante en Vasicek (1977)[51], nulo en el modelo CKLS (1992)[14], lineal en el modelo CIR (1985)[19, 20]).
- La estimación resultante es negativa, lo que corresponde a una prima positiva por soportar el riesgo de tipo de interés.
- No sorprende que la prima de riesgo sea menor para tipos de interés menores, ya que los tipos de interés bajos están asociados con una menor volatilidad que los altos.
- De una manera similar a la deriva y a la volatilidad estimada del proceso, la banda de confianza puntual es más ancha conforme los tipos son más altos, donde hay menos observaciones.

¹¹Respecto a la anchura de la ventana, después de considerar varias posibilidades (validación cruzada en cada regresión y algunas elecciones a dedo de la literatura), el mejor resultado se obtiene, en consonancia con los resultados alcanzados en Arapis y Gao (2006)[2] para otros conjuntos de datos, tomando la anchura de ventana global para todas las regresiones $h = 0,10 \cdot n^{-\frac{1}{5}}$ donde n es el número de observaciones.

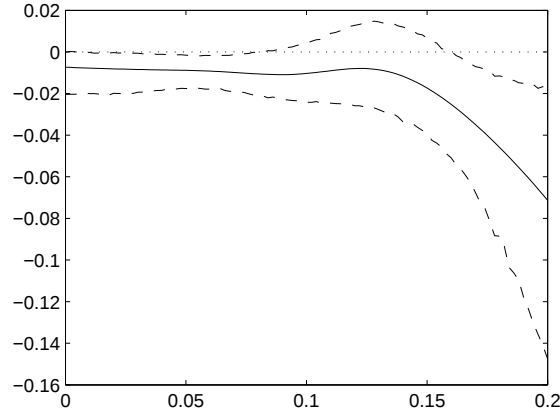


Figura 8: Estimación del precio del riesgo de mercado mediante la ecuación (18), usando una aproximación de orden uno y regresiones núcleo con núcleo gaussiano y $h = 0,10 \cdot n^{-\frac{1}{5}}$ para estimar las correspondientes derivas y volatilidades. Se añade, además, una banda puntual de confianza al 95 % obtenida por el método bootstrap de bloques móviles.

Una vez estimada la deriva, la volatilidad y el precio del riesgo de mercado del modelo (1) propuesto para la evolución de los tipos de interés a corto plazo en España, se puede utilizar para valorar activos derivados de los tipos de interés. Para ello, se va a usar el método Monte Carlo. Este procedimiento poderoso y versátil, introducido en Economía Financiera por Boyle (1977)[10], se emplea para aproximar el valor en el instante $t < T$ de un T -activo derivado, el cual viene dado por el siguiente valor esperado, calculado bajo una medida equivalente de martingalas:

$$p(t, T) = \mathbb{E}_{t,r}^* \left[X \cdot \exp \left\{ - \int_t^T r(u) du \right\} \right]. \quad (19)$$

El procedimiento para aproximar el precio consiste en simular, en el intervalo temporal $[t, T]$, una cantidad M suficientemente grande de trayectorias del proceso de los tipos de interés a corto plazo r bajo la medida equivalente de martingalas. Entonces, para cada camino simulado, se evalúa la expresión en el interior de la esperanza matemática (19), obteniendo unos precios simulados $p_i(t, T)$ con $i = 1, \dots, M$. Finalmente, se estima el precio del activo derivado mediante la media muestral de estos precios simulados.

Para simular una trayectoria del proceso r se suele usar una versión discreta del mismo, la más habitual es la aproximación de orden uno o esquema de Euler. Esta aproximación, aunque es la más sencilla proporciona muy buenos resultados¹². Sin embargo, con un pequeño ajuste se obtiene una aproximación con un mejor comportamiento en cuanto a la convergencia del proceso discretizado $\hat{r}$ a su límite r , Talay (1996)([50]). En concreto, la aproximación de Milstein, usada por ejemplo en los trabajos de Jiang (1998)[35] y Fernández (2001)[28], se obtiene añadiendo un término adicional en la de Euler, el cual proviene de la consideración de un término más en un desarrollo de Taylor-Itô. Así, para obtener una aproximación discreta $\hat{r}$ en un conjunto de tiempos equidistantes $t_j = t_0 + j \cdot \Delta$, basta fijar el valor

¹²Stanton (1997)[49] comprueba, mediante la simulación de varios procesos, que cuando la frecuencia de observación es al menos mensual los errores de discretización son pequeños.

en el instante inicial $r(0) = \hat{r}(0)$ y aplicar la siguiente ecuación recursiva:

$$\hat{r}(t_j) = \hat{r}(t_{j-1}) + [\mu(\hat{r}(t_{j-1})) - \lambda(\hat{r}(t_{j-1}))] \Delta + \sigma(\hat{r}(t_{j-1})) \sqrt{\Delta} \cdot Z_j + \frac{1}{2} \sigma^2(\hat{r}(t_{j-1})) \cdot \Delta (Z_j^2 - 1), \quad (20)$$

donde Z_j son variables aleatorias normales estándar independientes, para $j = 1, \dots, N$.

Un aspecto importante a tener en cuenta al usar el enfoque Monte Carlo es que la precisión del estimador se puede incrementar usando algún método de reducción de la varianza. A este respecto, se usa en las estimaciones de este trabajo el método de las variaciones antitéticas, con el que se intenta reducir la varianza introduciendo dependencia negativa entre pares de replicaciones, (Boyle *et al* (1997)[11]).

La aplicación del método Monte Carlo para valorar bonos cupón cero, $X = 1$ en la ecuación (19), se efectúa con diferentes vencimientos y niveles iniciales de los tipos de interés a corto plazo. Para estimar cada precio, se generan 2000 trayectorias con 100 datos diarios en cada una de ellas mediante la aproximación de Milstein, y se usan las estimaciones de orden uno de la deriva, la volatilidad y el precio del riesgo de mercado obtenidas con la anchura de ventana común antes mencionada $h = 0,10 \cdot n^{-\frac{1}{5}}$. Además, la variabilidad de los resultados se reduce usando el método de las variaciones antitéticas¹³. Los resultados obtenidos aparecen en la Tabla 6.

$T \backslash r$	3 %	6 %	9 %	12 %
1	0,9681	0,9405	0,9122	0,8829
2	0,9329	0,8824	0,8284	0,7727
3	0,8951	0,8255	0,7490	0,6701
4	0,8556	0,7704	0,6738	0,5763
5	0,8148	0,7171	0,6027	0,4945

Tabla 6: Precios estimados de bonos cupón cero para la Economía española mediante el método Monte Carlo. Se generan, para cada precio, 2000 trayectorias con 100 datos diarios mediante el método de Milstein y se reduce la variabilidad de las estimaciones mediante el método de las variaciones antitéticas.

Con el objetivo de ahondar un poco más sobre las repercusiones que tiene imponer en el modelo (1) de la dinámica del tipo de interés a corto plazo una deriva lineal, se valoran de nuevo los mismos bonos cupón cero de la Tabla 6 pero imponiendo la deriva lineal para la que no se encontró una evidencia contundente para su rechazo usando el test J_n (ver §4) y estimando el resto de los parámetros (volatilidad y precio del riesgo de mercado) de manera no paramétrica. Los precios estimados en esta nueva situación, y siguiendo la misma metodología y elecciones que en la Tabla 6, se presentan en la Tabla 7. Aquí, se han distinguido en **negrita** los precios que difieren menos del 1 % del correspondiente no paramétrico general (sin imponer la linealidad de la deriva), en *itálica* los que difieren entre un 1 % y un 2 % y enmarcado los que difieren entre un 2 % y un 2'5 % (la mayor diferencia observada es de un 2'4022 %). Comparando las dos tablas anteriores se observa que:

- En general, las diferencias entre los precios estimados mediante el modelo completamente no paramétrico y el que impone una deriva lineal aumentan con el nivel inicial de los tipos de interés y

¹³Con estas elecciones, Jiang (1198)[35] encuentra que el método Monte Carlo es de gran precisión. Para ello, usando datos de la economía estadounidense, compara las curvas de rendimiento obtenidas por este método con la que se obtiene resolviendo los correspondientes problemas de contorno y encuentra que las diferencias son pequeñas. Además, comprueba que el método de las variaciones antitéticas reduce en gran parte la varianza de las estimaciones.

$T \backslash r$	3 %	6 %	9 %	12 %
1	0,9670	0,9395	0,9124	0,8872
2	0,9290	0,8784	0,8303	0,7847
3	0,8870	0,8178	0,7534	0,6840
4	0,8421	0,7578	0,6804	0,5885
5	0,7952	0,6995	0,6118	0,5064

Tabla 7: Precios estimados de bonos cupón cero en España imponiendo en la ecuación (1) una deriva lineal. Se sigue el método Monte Carlo generando, para cada precio, 2000 trayectorias con 100 datos diarios mediante el método de Milstein y reduciendo la variabilidad de las estimaciones mediante el método de las variaciones antitéticas.

con el periodo del vencimiento del bono cupón cero.

- Todos los precios estimados bajo la hipótesis de una deriva lineal difieren de los correspondientes no paramétricos menos de un 2'5 %. Además, para tipos de interés iniciales inferiores al 9 %, rango donde la deriva estimada se aparta poco de la linealidad (Figura 6), y periodos de vencimiento de 3 años o menos, estas diferencias son inferiores al 1 %.

En conclusión, la adopción de una deriva lineal lleva a precios de bonos cupón cero bastante similares a los del modelo general, más aún si el tipo de interés inicial es bajo o medio (no superior al 9 %) y el periodo de vencimiento no supera los 3 años.

Según los resultados obtenidos en §4 no existen evidencias para rechazar una deriva lineal y aún menos una volatilidad potencial. Teniendo en cuenta que precisamente éstas son las formas funcionales paramétricas propuestas en el modelo CKLS, parece que éste es un modelo paramétrico razonable (en el marco de los modelos unifactoriales homogéneos) para el tipo de interés a corto plazo en España. Para ahondar un poco más en este aspecto, nos proponemos valorar con este modelo paramétrico los mismos bonos cupón cero que antes.

Para estimar la deriva y la volatilidad del modelo CKLS en base a las observaciones discretas $\{r(t), t = 1, \dots, n\}$, se sigue el procedimiento propuesto en Fan y Zhang (2003)[25]. Éste se basa en la discretización de primer orden del modelo, la cual viene dada por $Y(t) \approx (\alpha + \beta X(t)) \Delta + \sigma X(t) \sqrt{\Delta} Z(t)$, donde $Y(t) = r(t+1) - r(t)$, $X(t) = r(t)$, Δ es el paso de tiempo entre dos observaciones consecutivas y $Z(t)$ son variables aleatorias normales estándar independientes, con $t = 1, \dots, n-1$. El modelo CKLS estimado para los tipos a corto plazo en España mediante este procedimiento tiene por deriva $\hat{\mu}(r) = 0,002355 - 0,123824 \cdot r$ y por volatilidad $\hat{\sigma}(r) = 0,104994 \cdot r^{1,139133}$.

Finalmente, para poder valorar activos derivados con un modelo totalmente paramétrico se debe especificar y estimar una forma paramétrica para el precio del riesgo de mercado $\lambda(r)$. A la vista de la estimación no paramétrica de la Figura 8 no parece adecuado suponer, como por ejemplo hacen Chan *et al* (1992)[14], que es nulo. Tras considerar algunas formas funcionales propuestas en la literatura (nula, constante, proporcional a $r, \dots$), la que ofrece un mejor resultado al comparar la valoración de bonos cupón cero con el caso no paramétrico es $\lambda(r) = q \cdot r$ y una estimación basada en la aproximación mínimo-cuadrática a los valores obtenidos en el caso no paramétrico es $\hat{\lambda}(r) = -0,131863 \cdot r$.

Una vez estimado el modelo paramétrico se valoran los mismos bonos cupón cero que antes con el

modelo no paramétrico y mediante el mismo procedimiento. Los resultados obtenidos aparecen recogidos en la Tabla 8, donde se han distinguido en **negrita** los precios que difieren menos del 1 % del correspondiente no paramétrico, en *itálica* los que difieren entre un 1 % y un 2 % y enmarcado los que difieren más de un 2 %.

$T \backslash r$	3 %	6 %	9 %	12 %
1	0,9692	0,9404	0,9125	0,8855
2	0,9369	0,8819	0,8302	<i>0,7815</i>
3	0,9032	0,8246	0,7530	0,6875
4	<i>0,8685</i>	0,7690	<i>0,6808</i>	0,6031
5	0,8330	0,7149	<i>0,6139</i>	0,5272

Tabla 8: Precios estimados de bonos cupón cero usando el modelo CKLS y con $\lambda(r) = q \cdot r$. Se sigue el método Monte Carlo, generando, para cada precio, 2000 trayectorias con 100 datos diarios mediante la aproximación de Milstein y reduciendo la variabilidad de las estimaciones mediante el método de las variaciones antitéticas.

Comparando la Tabla 6 de la valoración no paramétrica de los bonos cupón cero con la Tabla 8 de la valoración de tales bonos con el modelo CKLS se pueden hacer prácticamente los mismos comentarios que antes al comparar la valoración no paramétrica con la que se obtiene en la Tabla 7 de imponer sólo una deriva lineal. Concretamente, la adopción del modelo paramétrico CKLS lleva a precios de bonos cupón cero bastante similares a los del modelo no paramétrico general, más aún si el tipo de interés inicial es bajo o medio (no superior al 9 %) y el periodo de vencimiento no supera los 3 años. Las diferencias aumentan con el nivel inicial de los tipos de interés y con el periodo del vencimiento del bono cupón cero.

En consecuencia, y recordando además las conclusiones de aplicar el test J_n en §4 a la deriva y a la volatilidad, se tiene que el modelo paramétrico CKLS es adecuado para representar la evolución de los tipos de interés a corto plazo en España. Su estimación tiene un comportamiento bastante similar a la estimación no paramétrica del modelo general planteado en la ecuación (1), al menos para tipos de interés bajos o medios y periodos de vencimiento no muy alejados en el tiempo. Además, esto mismo es cierto para el modelo planteado en la ecuación (1) imponiéndole una deriva lineal.

6. Conclusiones

En este trabajo se realiza un estudio empírico de los tipos de interés a corto plazo en España mediante el uso de un modelo unifactorial homogéneo y usando datos semanales de los tipos de interés interbancarios a un mes. La ausencia de consenso en la elección de un modelo adecuado nos lleva a usar técnicas de estimación no paramétricas para hacer un planteamiento totalmente general de la modelización. Una vez planteado el modelo, y realizado un primer análisis de los datos, se pasa a estimar sus parámetros mediante la metodología propuesta en Stanton (1997)[49]. De este estudio inicial de los datos y de la estimación de los parámetros cabe destacar las siguientes conclusiones:

- La estimación de la densidad estacionaria, presentada en la Figura 3, no invita a pensar que los

modelos más simples, como por ejemplo los gaussianos, sean adecuados en el contexto considerado.

- Las aproximaciones de los tres primeros órdenes tanto de la deriva como de la volatilidad son muy similares (Figura 6), que es lo que se espera que ocurra cuando los errores de aproximación son pequeños.
- Las bandas de confianza de las aproximaciones a la deriva y volatilidad son más estrechas para tipos de interés medios y bajos y mas anchas, reflejando una menor precisión en la estimación, para tipos altos.
- La deriva estimada (Figura 6) exhibe un comportamiento no lineal, con una leve reversión a la media para tipos de interés medios y bajos y cayendo fuertemente cuando los tipos se sitúan por encima del 15 %.
- La volatilidad estimada (Figura 6) aumenta con el nivel de los tipos de interés, estando en consonancia con la planteada en el modelo paramétrico de Chan *et al.*(1992) [14].

La forma particular de la deriva estimada se encuentra en otros trabajos que usan diferentes conjuntos de datos, lo que ha motivado un análisis más profundo de la situación, ya que no está claro que se pueda afirmar la no linealidad de la verdadera deriva a partir de la no linealidad de su estimación, Chapman y Pearson (2000)[15]. La consideración de la regresión lineal local no aporta mayor información al respecto. En esta situación, y dado que lo que se pretende investigar es si hay evidencia suficiente en los datos como para rechazar una deriva lineal, se considera oportuno aplicar algún test no paramétrico existente en la literatura. A este respecto, encontramos adecuado usar la versión bootstrap del test J_n (Kim y Wang (2006)[37]). La conclusión principal que se alcanza tras la aplicación del test es que no existe una evidencia contundente para rechazar la linealidad de la deriva (a un nivel de significatividad del 3 % el test no conduce a rechazar la hipótesis de linealidad en la deriva para ninguna anchura de ventana en un amplio rango, Tabla 4). En este contexto, se aplica el test para contrastar dos formas funcionales para la volatilidad, llegando a que hay evidencia para rechazar una volatilidad constante y a que se acepta una volatilidad como la propuesta en el modelo CKLS.

Finalmente, con el objetivo de usar el modelo para valorar activos derivados de los tipos de interés (bonos concretamente), es necesario previamente aproximar el precio del riesgo de mercado. Esto se hace mediante el enfoque no paramétrico propuesto en Jiang (1998)[35], llegando a estimación que aparece en la Figura 8, sobre la que se pueden destacar las siguientes características: Al igual que para la deriva y la volatilidad, la banda de confianza es más ancha conforme los tipos de interés son más altos. La estimación es negativa (correspondiente a una prima positiva por soportar el riesgo de tipo de interés), siendo cercana a cero para tipos de interés medios y bajos y decreciendo fuertemente cuando éstos son altos, llevando a una prima de riesgo mayor cuando los tipos de interés son más altos (y volátiles). Para valorar los bonos cupón cero, se usa el método Monte Carlo, en el cual, con el objetivo de disminuir la varianza de las estimaciones, se aplica el método de las variaciones antitéticas. En este contexto, y con el propósito de ahondar en las consecuencias de una especificación lineal de la deriva y de un modelo completamente paramétrico, se valoran bonos para diferentes niveles de los tipos de interés y vencimientos, en tres modelos diferentes: El modelo completamente no paramétrico, el modelo anterior con la especificación de una deriva lineal y el modelo completamente paramétrico CKLS. La principal conclusión a la que se llega es que los tres modelos llevan a precios muy similares cuando el nivel inicial

de los tipos de interés es medio o bajo (inferior al 9 %) y el vencimiento es inferior a 3 años, Tablas 6, 7 y 8. Además, en general, las diferencias aumentan con el nivel inicial de los tipos de interés y el periodo de vencimiento.

Como consecuencia de los resultados del test J_n y de la valoración de bonos, una conclusión destacable es que el modelo paramétrico CKLS parece adecuado para describir los movimientos de los tipos de interés a corto plazo en España, al menos cuando éstos se mantienen en niveles medios o bajos (como en la actualidad).

Referencias

- [1] Andersen, T.G. y Lund, J. (1977). Estimating continuous-time stochastic volatility models of the short-term interest rate. *Journal of Econometrics*, **77**, 343–377.
- [2] Arapis, M. y Gao, J. (2006). Empirical Comparisons in Short-Term Interest Rate Models Using Nonparametric Methods. *Journal of Financial Econometrics*, **4**, 310–345.
- [3] Aït-Sahalia, Y. (1996). Nonparametric Pricing of Interest Rate Derivative Securities. *Econometrica*, **64**, 527–560.
- [4] Aït-Sahalia, Y. (1996). Testing Continuous-Time Models of the Spot Rate. *Review of Financial Studies*, **9**, 385–426.
- [5] Björk, T. (1997). Interest Rate Theory. *Lecture Notes in Mathematics*, **1656**, 53–122. Springer–Verlag, Berlin.
- [6] Black, F., Derman, E., y Toy, W. (1990). A one-factor model of interest rates and its applications to treasury bond options. *Financial Analysts Journal*, **46**, 33–39.
- [7] Black, F. y Karasinski, P. (1991). Bond and option pricing when short rates are lognormal. *Financial Analysts Journal*, **47**, 52–59.
- [8] Black, F. y Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, **81**, 637–659.
- [9] Box, G., Jenkins, G.M., y Reinsel, G. (1994). *Time Series Analysis: Forecasting & Control*. Prentice–Hall, 3 edición.
- [10] Boyle, P. (1977). Options: a Monte–Carlo approach. *Journal of Financial Economics*, **4**, 323–338.
- [11] Boyle, P., Broadie, M., y Glasserman, P. (1997). Monte–Carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*, **21**, 1267–1322.
- [12] Brennan, M. y Schwartz, E. (1980). Analyzing convertible bonds. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **15** (4), 907–929.
- [13] Canabarro, E. (1995). Where do one-factor interest rate models fail? *The Journal of Fixed Income*, **5**, 31–52.
- [14] Chan, K.C., Karolyi, G.A., Longstaff, F.A., y Sanders, A.B. (1992). An Empirical Comparison of Alternative Models of the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, **47**, 1209–1228.
- [15] Chapman, D.A. y Pearson, N.D. (2000). Is the Short Rate Drift Actually Nonlinear? *Journal of Finance*, **55** (1), 355–388.

- [16] Constantinides, G. (1992). A Theory of the Nominal Term Structure of Interest Rates. *Review of Financial Studies*, **5**, 531–552.
- [17] Corzo, T. y Gómez, J. (2001). Nonparametric Estimation of Interest Rates Processes in Europe. *Revista de Economía Aplicada*, **9** (27), 83–101.
- [18] Cox, J. (1975). Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusions. Working paper, Stanford University, Graduate School of Business. Reimpreso en *Journal of Portfolio Management* 1996, **22**, 15–17.
- [19] Cox, J.C., Ingersoll, J.E., y Ross, S. (1985). An intemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica*, **53**, 363–384.
- [20] Cox, J.C., Ingersoll, J.E., y Ross, S. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, **53**, 385–407.
- [21] Dothan, L.U. (1978). On the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial Economics*, **6**, 59–69.
- [22] Duffie, D. y Kan, R. (1996). A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, **6**, 379–406.
- [23] Dybvig, P.H. (1997). Bond and Bond Option Pricing Based on the Current Term Structure. En M.A.H. Dempster y S. Pliska, eds., *Mathematics of Derivative Securities*. Cambridge University Press.
- [24] Fan, J., Zhang, C., y Zhang, J. (2001). Generalized likelihood ratio statistics and Wilks phenomenon. *Annals of Statistics*, **29**, 153–193.
- [25] Fan, J. y Zhang, C. (2003). A reexamination of diffusion estimators with applications to financial model validation. *Journal of the American Statistical Association*, **98**, 118–134.
- [26] Fan, J. y Gijbels, I. (1995). Data-Driven Bandwidth Selection in Local Polynomial Fitting: Variable Bandwidth and Spatial Adaptation. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, **57** (2), 371–394.
- [27] Fan, Y. y Li, Q. (1997). A Consistent Nonparametric Test for Linearity of AR(p) Models. *Economics Letters*, **55**, 53–59.
- [28] Fernandez, V. (2001). A nonparametric approach to model the term structure of interest rates: The case of Chile. *International Review of Financial Analysis*, **10**, 99–122.
- [29] García, J. (1998). Tipos de interés a corto plazo en España. *Revista de Economía Aplicada*, **18** (6), 5–26.
- [30] Gavilán Ruiz, J.M. y Alba Riesco, J.M. (2003). Un Análisis no Paramétrico de los Tipos de Interés a Corto Plazo en España. VI Encuentro de Economía Aplicada.
- [31] Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- [32] Ho, T. y Lee, S. (1986). Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims. *Journal of Finance*, **41**, 1011–1029.
- [33] Härdle, W. (1997). *Applied Nonparametric Regression*. Cambridge University Press.
- [34] Hull, J. y White, A. (1990). Pricing interest rate derivative securities. *Review of Financial Studies*, **3**, 573–592.

- [35] Jiang, G.J. (1998). Nonparametric Modeling of U.S. Interest Rate Term Structure Dynamics and Implications on the Prices of Derivative Securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **33** (4), 465–497.
- [36] Jiang, G.J. y Knight, J.L. (1997). A Nonparametric Approach to the Estimation of Diffusion Processes, with an Application to a Short-Term Interest Rate Model. *Econometric Theory*, **13**, 615–645.
- [37] Kim, M.S. y Wang, S. (2006). Sizes of two bootstrap-based nonparametric specification tests for the drift function in continuous time models. *Computational Statistics & Data Analysis*, **50**, 1793–1806.
- [38] Künsch, H. (1989). The Jackknife and the Bootstrap for General Stationary Observations. *Annals of Statistics*, **17** (3), 1217–1241.
- [39] Li, Q. (1994). A Consistent Test for Linearity in Partially Linear Regression Models. Universidad de Guelph. Disponible en <http://ideas.repec.org/p/fth/guelph/1994-7.html>.
- [40] Li, Q. (1999). Consistent model specification tests for time series econometric models. *Journal of Econometrics*, **92**, 101–147.
- [41] Li, Q. y Wang, S. (1998). A simple consistent bootstrap test for a parametric regression function. *Journal of Econometrics*, **87**, 145–165.
- [42] Litterman, R. y Scheinkman, J.A. (1991). Common Factors Affecting Bond Returns. *Journal of Fixed Income*, **1**, 54–61.
- [43] Liu, R.Y. y Singh, K. (1992). Moving Blocks Jackknife and Bootstrap Capture Weak Dependence. En: Exploring the Limits of Bootstrap. Editado por LePage, R, y Billard, L.
- [44] Longstaff, F.A. y Schwartz, E.S. (1992). Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model. *Journal of Finance*, **47**, 1259–1282.
- [45] Merton, R.C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**, 141–183.
- [46] Moreno, M. (2000). Modelización de la estructura temporal de los tipos de interés: valoración de activos derivados y comportamiento empírico. *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, **29** (104), 345–376.
- [47] Nowman, K. (1997). Gaussian Estimation of Single-Factor Continuous Time models of the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, **52** (4), 1695–1706.
- [48] Silverman, B.W. (1986). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman and Hall.
- [49] Stanton, R. (1997). A nonparametric model of term structure dynamics and the market price of interest rate risk. *Journal of Finance*, **52** (5), 1973–2002.
- [50] Talay, D. (1996). Probabilistic numerical methods for PDEs: Elements of analysis. En D. Talay y L. Tubaro, eds., *Probabilistic Methods for Nonlinear PDEs*. Springer.
- [51] Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, **5**, 177–188.
- [52] Vetzal, K.R. (1997). Stochastic Volatility, Movements in Short-Term Interest Rates and Bond Option Values. *Journal of Banking and Finance*, **21**, 169–196.
- [53] Zheng, J.X. (1996). A consistent test of functional form via non-parametric estimation techniques. *Journal of Econometrics*, **75**, 263–289.