

# MEMORIA LARGA Y PERSISTENCIA EN LAS TASAS DE INFLACIÓN EN ESPAÑA\*

ERNEST PONS FANALS  
Universitat de Barcelona

## 1. Introducción

Tanto en la teoría macroeconómica como en la toma de decisiones de política económica tiene un especial interés conocer el grado de persistencia de las tasas de inflación. Además, dicho grado de persistencia en las tasas de inflación en España, así como en otros países, está adquiriendo una especial relevancia en los últimos tiempos debido a la existencia de shocks externos que inducen a un aumento de dichas tasas de inflación. A pesar de dicho interés, pueden encontrarse en la literatura especializada abundantes resultados empíricos contradictorios acerca de la estacionariedad o no estacionariedad de las tasas de inflación tanto en este como en otros países.

Así, a nivel internacional MacDonald y Murphy (1989), analizando las tasas de inflación a partir de datos trimestrales para Bélgica, Canadá, el Reino Unido y los Estados Unidos entre 1955 y 1986 han encontrado clara evidencia a favor de que dichas tasas de inflación son integradas de orden 1, es decir,  $I(1)$ . También usando datos trimestrales, Barsky (1987) ha encontrado evidencia de que la tasa de inflación ha sido estacionaria en Estados Unidos antes de 1959 pero parece contener una raíz unitaria entre 1960 y 1979. Wickens y Tzavalis (1992),

---

Este trabajo es parte de un proyecto de investigación más amplio realizado en el *Grup d'Anàlisi Quantitativa Regional* de la *Universitat de Barcelona*.

a partir de datos de inflación mensuales para los Estados Unidos obtienen también evidencia de no estacionariedad mientras que Kirchgässner y Wolters (1993) obtienen, para Estados Unidos, Reino Unido, Francia, Alemania y Suiza, resultados variables dependiendo del periodo temporal seleccionado y de los contrastes utilizados aunque con mayor evidencia de tasas de inflación  $I(1)$ .

La mayoría de dichos trabajos tienen en común que se basan en la utilización de los contrastes de integrabilidad propuestos por Dickey y Fuller (1981) y en los tradicionales modelos autorregresivos, integrados y media móvil (ARIMA).

Más recientemente, Hassler y Wolters (1995) utilizan los más flexibles modelos autorregresivos, fraccionalmente integrados y media móvil (ARFIMA) y encuentran evidencia a favor de que las tasas de inflación en Estados Unidos, el Reino Unido, Francia, Alemania e Italia entre 1969 y 1992 presentan memoria larga aunque se descarta la presencia de una raíz unitaria. En dicho trabajo se aplica el método de estimación propuesto por Geweke y Porter-Hudak (1983) (GPH) para obtener una estimación del orden de integración fraccional de las tasas de inflación. No obstante, en Agiakloglou *et al.* (1993) se muestra como, en ciertas circunstancias, dicho estimador puede estar seriamente sesgado y, por tanto, los contrastes basados en dicho estimador pueden presentar importantes distorsiones.

El objetivo de este trabajo es analizar la evidencia empírica disponible acerca del grado de persistencia de las tasas de inflación en España pero utilizando un enfoque ligeramente

diferente de los anteriores. Así, se basa en la utilización del concepto de integración fraccional y, para superar algunas de las limitaciones del estimador GPH, se propone una extensión paramétrica de dicho estimador que permite reducir dicho sesgo y mejorar las propiedades de los contrastes acerca del parámetro de integración fraccional.

Para obtener resultados más robustos, se analizan tanto las tasas de inflación nacionales como las tasas de inflación de cada una de las 17 comunidades autónomas además de Ceuta y Melilla. Ello permite, además de conocer el grado de persistencia de estas tasas de inflación, analizar si existe o no algún tipo de convergencia entre las tasas de inflación de las diferentes regiones españolas.

## **2. Persistencia e integración fraccional**

La distinción tradicional entre procesos  $I(0)$  y procesos  $I(1)$  hace hincapié en que las innovaciones o *shocks* tienen efectos muy diferentes. Pero dichos casos representan situaciones muy extremas en cuanto a sus propiedades y por ello la literatura relacionada con el análisis de las series temporales ha mostrado recientemente gran interés por los modelos fraccionalmente integrados ya que permiten la modelización de situaciones intermedias.

Buena parte de este reciente interés se debe al desarrollo de los modelos autorregresivos, media móvil y fraccionalmente integrados (ARFIMA) que permiten, de manera relativamente simple, la modelización de situaciones intermedias entre los modelos ARMA (estacionarios y con poca

persistencia) y los modelos ARIMA (con raíces unitarias y, por tanto, con una persistencia infinita de los posibles shocks).

Concretamente, se dice que un proceso estocástico  $X_t$  sigue un proceso autorregresivo, media móvil y fraccionalmente integrado (ARFIMA) si:

$$\phi(L)(1-L)^d X_t = \theta(L)\varepsilon_t \quad (1)$$

donde los polinomios de (1) están definidos a partir de:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p \quad (2)$$

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q \quad (3)$$

$$(1-L)^d = 1 - dL - \frac{d}{2!}(1-d)L^2 \dots \quad (4)$$

y  $\varepsilon_t$  es un proceso ruido blanco. Si los polinomios (2) y (3) que describen el comportamiento a corto plazo tienen todas sus raíces fuera del círculo unidad y el parámetro  $d$  se encuentra en el intervalo  $(-1/2, 1/2)$  el proceso es estacionario e invertible mientras que, cuando  $d \geq 1/2$ , el proceso es no estacionario, aunque siempre es posible convertirlo en estacionario utilizando el operador  $(1-L)$ .

El interés por estos modelos en el presente trabajo se debe a que incluyen como casos particulares situaciones muy diversas. En este sentido, cuando  $d=0$  se trata de un modelo ARMA (con un grado de persistencia muy bajo) y cuando  $d=1$  se trata de un modelo ARIMA (con una persistencia infinita de los *shocks* que puedan afectar a la variable).

En cambio, cuando  $0 < d < 1$  se dice que la serie temporal presenta memoria larga. En este caso, aunque la serie no sea  $I(1)$ , es decir, no contenga ninguna raíz unitaria, el grado de persistencia de dichos datos es mucho mayor que la de un proceso ARMA. De hecho, los procesos ARFIMA con  $0 < d < 1$  exhiben el “typical spectral shape of economic variables” citado por Granger (1966).

Más concretamente, cuando se pretende analizar el grado de persistencia de una serie temporal  $X_t$  es habitual en la literatura suponer que dicha serie en diferencias admite una representación de Wold,

$$(1 - L)X_t = \mu + b(L)\varepsilon_t = \mu + (1 + b_1L + b_2L^2 + b_3L^3 \dots) \varepsilon_t \quad (5)$$

donde las innovaciones  $\varepsilon_t$  son ruido blanco. Dicha formulación permite que la serie contenga tanto una tendencia determinista (en la notación habitual serie TS, *trend-stationary*) como una tendencia estocásticas (en la notación habitual series DS, *difference-stationary*). Por ejemplo, si  $(1 - L)X_t$  es un proceso ARMA con polinomios  $\phi(L)$  y  $\theta(L)$ , entonces  $X_t$  es TS cuando el polinomio  $\theta(L)$  contenga una raíz unitaria ya que, en este caso,  $X_t = \mu t + a(L)\varepsilon_t$  con  $a(L) = b(L)(1 - L)$ . Si  $\theta(L)$  no contiene una raíz unitaria entonces  $X_t$  es DS.

Pero la formulación (5) permite extender el análisis de la persistencia de la serie  $X_t$  a un contexto más general. Así, como  $X_t = \mu t + a(L)\varepsilon_t$  con  $a(L) = b(L)(1 - L)$ , los coeficientes del polinomio  $a(L)$  permiten medir la persistencia de los shocks sobre la evolución futura de

$X_t$ . Concretamente, un *shock* en el momento  $t-k$  se traduce en una variación igual a  $a_k$  en el

momento  $t$  donde  $a_k = \sum_{j=0}^k b_j$ . Por tanto, el efecto a largo plazo de un *shock* cualquiera es igual

a  $a_\infty = \sum_{j=0}^{\infty} b_j = b(1)$ , de manera que cuando  $b(1)=0$  se dice que la serie  $X_t$  presenta reversión

a la media. No obstante, aunque el valor  $b(1)$  permite conocer la persistencia a largo plazo, también es importante conocer la sucesión de coeficientes  $a_k$ .

Siguiendo la formulación (5), y utilizando una modelización ARFIMA para la serie de interés en diferencias, se obtiene:

$$\phi(L)(1-L)^{d^*} (X_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t \quad (6)$$

el valor del parámetro  $d^*$  determina el grado de persistencia de la serie. Así, en este caso el polinomio  $b(L)$  es igual a  $(1-L)^{-d^*}\theta(L)\phi^{-1}(L)$ . Para evaluar el coeficiente  $b(1)$  puede utilizarse que  $b(L) = F(d^*, 1, 1; L)\theta(L)\phi^{-1}(L)$  donde  $F(a, b, c; x)$  es la función hipergeométrica. En Gradszteyn y Ryshnik (1980, pág. 1039-1042) se demuestra que  $F(d^*, 1, 1) = 0$  si y solo si  $d^* < 0$ . Teniendo en cuenta que, si la serie de interés en diferencias es fraccionalmente integrada de orden  $d^*$ , entonces la serie de interés sin diferenciar es de orden  $d = d^* + 1$ , queda comprobado que cuando el orden de integración es inferior a la unidad, dicha serie presenta reversión a la media.

Por tanto, un método relativamente sencillo para conocer el grado de persistencia consiste en obtener una estimación del valor del parámetro  $d$ . No obstante, bajo el supuesto de que una serie temporal haya sido generada a través del modelo (1), Sowell (1990) demostró que no pueden aplicarse los contrastes propuestos por Dickey y Fuller (1981).

Por otra parte, la estimación completa de los parámetros de un modelo ARFIMA como el modelo (6) presenta problemas estadísticos importantes ya que cualquier error en la especificación de los órdenes  $p$  y  $q$  de los polinomios  $\phi(L)$  y  $\theta(L)$ , puede generar sesgos importantes en la estimación del orden de integración fraccional (véase Smith *et al.*, 1997)

Para evitar dichos problemas, se desarrolla a continuación un método para la estimación basado en la propuesta de Geweke y Porter-Hudak (1983) que permita obtener estimaciones del parámetro  $d^*$  del modelo (6) corregidas de sesgo para conocer el grado de persistencia de las tasas de inflación en España.

### **3. Estimación semiparamétrica del grado de integración fraccional**

Entre todos los métodos propuestos en la literatura para la estimación del parámetro de integración fraccional, uno de los más populares y sin duda, el más utilizado en las aplicaciones prácticas en el ámbito económico, es el propuesto por Geweke y Porter-Hudak (1983) (GPH).

Dicha propuesta se basa en que la densidad espectral del modelo (1) cumple:

$$f(\omega) = \left\{4\sin^2(\omega/2)\right\}^{-d} f_Y(\omega) \quad (7)$$

donde  $d \in (-0.5, 0.5)$  y  $f_Y(\omega)$  es una función par, positiva y continua en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  y acotada.

Al tomar logaritmos en la expresión anterior y reordenando de manera adecuada se obtiene:

$$\log f(\omega) = \log f_Y(0) - d \log \left\{4\sin^2(\omega/2)\right\} + \log \frac{f_Y(\omega)}{f_Y(0)} \quad (8)$$

Si se dispone de observaciones  $X_t, t=1, \dots, n$ , puede usarse el periodograma para evaluar la expresión (8) en las frecuencias armónicas  $\omega_j = 2\pi j/n$  y se obtiene la siguiente igualdad:

$$\log I(\omega_j) = \log f_Y(0) - d \log \left\{4\sin^2(\omega_j/2)\right\} + \log \frac{f_Y(\omega_j)}{f_Y(0)} + \log \frac{I(\omega_j)}{f(\omega_j)} \quad (9)$$

El aspecto fundamental de esta aproximación es la hipótesis de que en frecuencias suficientemente próximas a la frecuencia cero, el penúltimo sumando de la parte derecha de (9) puede ser despreciado en comparación con los otros. Así, si se utiliza el periodograma como aproximación de la densidad espectral en las frecuencias armónicas, se cumple la siguiente aproximación:

$$\log I(\omega_j) \approx \log f_Y(0) - d \log \left\{4\sin^2(\omega_j/2)\right\} + \log \frac{I(\omega_j)}{f(\omega_j)} \quad (10)$$

De manera que, para obtener una estimación del parámetro  $d$ , los autores proponen especificar el siguiente modelo de regresión:

$$\log I(\omega_j) = \alpha + \beta R_j + e_j \quad (11)$$

donde el regresando  $\log I(\omega_j)$  es el logaritmo del periodograma en la frecuencia  $\omega_j = 2\pi j/T$  con  $T$  el numero de observaciones, la constante  $\alpha$  es el logaritmo del espectro en cero de  $(1-L)^d X_t$ , el regresor  $R_j$  está definido por  $R_j = \log\{4\sin^2(\omega_j/2)\}$  y el error del modelo es el logaritmo del periodograma normalizado,  $e_j = \log\{I(\omega_j)/f(\omega_j)\}$ . Una vez se dispone de una estimación del parámetro  $d$ , el cálculo de  $Y_t = (1-L)^d X_t$  permite obtener estimaciones de los parámetros autorregresivos y media móvil.

Es importante observar que las propiedades de este estimador del parámetro  $d$  depende de las características estocásticas de este último término,  $e_t$ . Así, si el proceso  $Y_t$  es ruido blanco, entonces su espectro  $f_Y(\omega)$  es constante. Como las ordenadas del periodograma son independientes, entonces las ordenadas del periodograma normalizado  $I(\omega_j)/f_Y(\omega_j)$  también son independientes. Por tanto, queda garantizado que si  $Y_t$  es ruido blanco, el método MQO proporciona buenas estimaciones del parámetro  $d$ .

Pero, dependiendo de las características del proceso  $Y_t = (1-L)^d X_t$ , la no constancia del término  $\log\{f_Y(\omega_j) / f_Y(0)\}$  puede generar un sesgo importante. En particular, cuando  $Y_t$  incluye parámetros autorregresivos o media móvil de valor absoluto elevado, el estimador puede presentar un sesgo muy importante, como se puede comprobar en Agiaklogou *et al.* (1993).

De hecho, el sesgo del estimador GPH en muestras finitas es:

$$E(\tilde{d}_{GPH} - d) = -\frac{1}{S_{RR}} \sum_{j=1}^m (R_j - \bar{R}) \log f_Y(\omega_j) - \frac{1}{S_{RR}} \sum_{j=1}^m (R_j - \bar{R}) E(e_j) \quad (12)$$

donde  $R_j = \log\{4\sin^2(\omega_j/2)\}$ ,  $\bar{R} = m^{-1} \sum_{j=1}^m R_j$  y  $S_{RR} = \sum_{j=1}^m (R_j - \bar{R})^2$ . En Hurvich *et al.*

(1998, pág. 24) se demuestra que el segundo término de la ecuación (12), es decir, el sesgo derivado de que la esperanza asintótica de  $\varepsilon_j$  no es independiente del número de frecuencias, es despreciable comparado con el primer término de la ecuación (12), es decir, el sesgo derivado de que el término  $\log\{f_Y(\omega_j) / f_Y(0)\}$  no es constante.

Pero utilizando una parametrización diferente de  $Y_t$  es posible escribir  $\log f_Y(\omega)$  como función lineal del parámetro  $d$  y de los parámetros asociados con la memoria corta de la serie. Para ello, es suficiente utilizar una modelización propuesta por Bloomfield (1973), teniendo en cuenta que  $Y_t$  es estacionario:

$$f_Y(\omega) = \frac{\tau^2}{2\pi} \exp \left\{ -2 \sum_{k=1}^l \beta_k \cos(k\omega) \right\} \quad (13)$$

Los resultados del Anexo 1 permiten garantizar que todo proceso ARMA puede aproximarse a través de un modelo con densidad espectral de la forma (13), de manera que la densidad espectral de  $X_t$  puede escribirse como:

$$f_X(\omega) = \left\{ 4 \sin^2(\omega/2) \right\}^{-d} \frac{\tau^2}{2\pi} \exp \left\{ -2 \sum_{k=1}^l \beta_k \cos(k\omega) \right\} \quad (14)$$

Por tanto, si se usa el periodograma como aproximación de la densidad espectral en las frecuencias armónicas, se obtiene la siguiente aproximación:

$$\log I(\omega_j) = \log \frac{\tau^2}{2\tau} - d \log 4 \sin^2 \frac{\omega_j \tau}{2} + 2 \sum_{k=1}^l \beta_k \cos k\omega + \log \frac{I(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \quad (15)$$

hecho que motiva la utilización del siguiente modelo de regresión:

$$\log I(\omega_j) = \alpha + \beta R_j + \sum_{k=1}^l \beta_k \cos(k\omega) + e_j \quad (16)$$

Nótese como este modelo es una extensión del modelo de regresión (11) donde se han añadido regresores adicionales. La ventaja de utilizar este modelo ampliado consiste en que los regresores incorporados permiten discriminar las componentes de memoria larga de las componentes de memoria corta. Para distinguir este estimador del estimador GPH lo notaremos como estimador GPH ampliado (GPHA).

En Pons y Suriñach (2000) se demuestra que, ante la presencia de coeficientes autorregresivos o media móvil superiores en valor absoluto a 0.6 en el modelo (1), el error cuadrático medio del estimador GPHA es asintóticamente menor al error cuadrático medio del estimador GPH.

En dicho trabajo se demuestra, además, que cuando el objetivo final de la estimación del parámetro  $d$  es el contraste de hipótesis como, por ejemplo, la hipótesis  $H_0: d=0$ , el contraste basado GPHA presenta un tamaño efectivo muy próximo al tamaño nominal del contraste, propiedad que no se cumple con el contraste basado en GPH. En este sentido, se presentan en el Anexo 2 algunos de los resultados obtenidos en un amplio ejercicio de simulación que

permiten comprobar como ello es así, independientemente del valor de los parámetros autorregresivos y media móvil.

#### **4. Persistencia de las tasas de inflación en las regiones españolas**

Una de las muchas aplicaciones del estimador propuesto en el apartado anterior consiste en la estimación del orden de integración de las tasas de inflación en España. Se trata de una aplicación de especial interés, teniendo en cuenta que es posible encontrar en la literatura econométrica una importante controversia en relación a la posibilidad de que las tasas de inflación contengan una raíz unitaria.

Nótese que la aceptación de dicha hipótesis tiene importantes implicaciones de política económica ya que la presencia de una raíz unitaria en el crecimiento de los precios implica que, en tal caso, los *shocks* que afecten a la tasa de inflación en el presente deberían tener un efecto permanente en las tasas de inflación futuras.

Para analizar la verosimilitud de la presencia de una raíz unitaria en las tasas de inflación en España, se han utilizado los datos mensuales del IPC español desde Enero de 1978 hasta Diciembre de 1999 (Base 1992). Además, y para obtener resultados más robustos, se ha utilizado también el IPC de cada una de las 17 Comunidades Autónomas más Ceuta y Melilla.

Sean  $X_{kt}$  las series de tasas de inflación interanual<sup>1</sup> para cada una de las Comunidades Autónomas ( $k=1,\dots,17$ ), Ceuta y Melilla ( $k=18$ ) o España ( $k=19$ ) para el periodo 1979.1-1999.12. Para la utilización del método de estimación propuesto en el apartado anterior es mejor estimar el orden de integración fraccional de la serie de diferencias de las tasas de inflación  $Z_{kt} = X_{kt} - X_{kt-1}$  ya que puede suponerse que dichas diferencias son estacionarias. Supóngase que la densidad espectral de  $Z_{kt}$  es:

$$f_k(\omega) = \left\{4\sin^2(\omega/2)\right\}^{-d_k^*} f_k^*(\omega) \quad (17)$$

donde  $d_k^* \in (-0.5, 0.5)$  y  $f_k^*(\omega)$  es una función par, positiva y continua en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  y acotada. A partir de la propuesta del apartado anterior, planteando el modelo de regresión (16) con  $l=1$ , puede estimarse por Mínimos Cuadrados Ordinarios el parámetro  $d_k^*$  como:

$$\hat{d}_k^* = \frac{-S_{CC} \sum_{j=1}^m (R_j - \bar{R}) I_k^*(\omega_j) + S_{RC} \sum_{j=1}^m (C_j - \bar{C}) I_k^*(\omega_j)}{S_{RR} S_{CC} - (S_{RC})^2} \quad (18)$$

donde  $I(\omega_j) = \log \left( 2\pi T \right)^{-1} \left| \sum_{t=1}^T Z_{kt} \exp(it\omega_j) \right|^2$ ,  $\omega_j = 2\pi j/T$ ,  $R_j = \log \left\{ 4\sin^2(\omega_j/2) \right\}$ ,

$$\bar{R} = m^{-1} \sum_{j=1}^m R_j, \quad C_j = \cos \omega_j, \quad \bar{C} = m^{-1} \sum_{j=1}^m C_j, \quad S_{RR} = \sum_{j=1}^m (R_j - \bar{R})^2, \quad S_{CC} = \sum_{j=1}^m (C_j - \bar{C})^2$$

$$\text{y } S_{RC} = \sum_{j=1}^m (R_j - \bar{R})(C_j - \bar{C}).$$

---

<sup>1</sup> Se analiza el orden de integración de las tasas de inflación interanual en lugar de las tasas de inflación mensual para evitar que la presencia de variaciones de carácter estacional puedan distorsionar los resultados obtenidos.

En la Tabla 1 se presentan las estimaciones de  $d_k^*$  a partir de (18) y los errores estándar de dichas estimaciones utilizando  $m=[n/2]=132$  (la totalidad de las frecuencias disponibles) y  $m=[n/4]=66$ . Destaca el hecho de que con ninguna de estas estimaciones pueda rechazarse la hipótesis nula de que  $d_k^*=0$  y, por tanto, no puede rechazarse en ningún caso la presencia de una raíz unitaria en las tasas de inflación en el periodo analizado.

Por tanto, de la metodología aplicada y de los resultados presentados en la Tabla 1 se obtiene una fuerte evidencia empírica en favor de la presencia de una raíz unitaria en las tasas de inflación en España. Una vez comprobado que las tasas de inflación son I(1), la metodología propuesta permite también contrastar si existe convergencia entre las tasas de inflación regionales.

**Tabla 1.** Resultados de la estimación de  $d_k^*$  mediante el método GPHA

	<b>m=66</b>		<b>m=132</b>	
	$\tilde{d}_k^*$	e.s.( $\tilde{d}_k^*$ )	$\tilde{d}_k^*$	e.s.( $\tilde{d}_k^*$ )
<b>AND</b>	-0.08	0.19	-0.06	0.15
<b>ARA</b>	-0.02	0.18	-0.01	0.15
<b>AST</b>	0.01	0.18	0.01	0.14
<b>BAL</b>	-0.15	0.16	-0.14	0.14
<b>CAN</b>	0.07	0.16	0.05	0.14
<b>CBR</b>	0.05	0.22	0.08	0.15
<b>CLE</b>	-0.04	0.17	-0.12	0.13
<b>CMA</b>	-0.01	0.18	-0.02	0.13
<b>CAT</b>	-0.01	0.15	-0.02	0.13
<b>CV</b>	-0.10	0.17	0.05	0.13
<b>EXT</b>	-0.16	0.17	-0.13	0.14
<b>GAL</b>	-0.06	0.17	-0.05	0.15
<b>MAD</b>	0.03	0.22	0.03	0.15
<b>MUR</b>	0.12	0.21	0.14	0.14
<b>NAV</b>	-0.01	0.16	-0.06	0.14
<b>PVA</b>	0.03	0.17	0.00	0.13
<b>RIO</b>	0.07	0.16	0.01	0.14
<b>CM</b>	-0.03	0.19	-0.02	0.15
<b>ESP</b>	0.03	0.17	0.04	0.14

Fuente: Elaboración propia

Siguiendo la propuesta de Bernard y Durlauf (1991), diremos que las tasas de inflación de dos regiones  $k$  y  $h$  convergen si  $X_{kt}$  y  $X_{ht}$  son series I(1) y la diferencia  $Z_{kt}^h = X_{kt} - X_{ht}$  es I( $b$ ) con  $b < 1$ . Nótese como  $Z_{kt}^h$  es el diferencial de inflación entre las regiones  $k$  y  $h$  de manera que, si dicho diferencial es I(0), ambas tasas tenderán a largo plazo a un valor común, mientras que si dicho diferencial es I(1), habrá diferencias permanentes entre ambas tasas de inflación. Así, cuando sólo se admiten órdenes de integración enteros, se dice que las tasas de inflación convergen si  $Z_{kt}^h$  es I(0).

En cambio, en el contexto más general propuesto en este trabajo, cuando se admiten órdenes de integración fraccionales, el valor del parámetro  $b \in [0, 1]$  determina la velocidad de convergencia de dichas tasas de inflación. Así, si  $b = 0$ , entonces la convergencia es muy rápida mientras que cuando  $0 < b < 1$ , dicha convergencia es más lenta ya que las diferencias están integradas fraccionalmente<sup>2</sup>. Finalmente, si  $b = 1$  no existe convergencia entre dichas tasas de inflación. Como se dispone de información acerca de 18 regiones (17 Comunidades Autónomas además de Ceuta y Melilla) se pueden definir 153 diferenciales de inflación,  $Z_{kt}^h$  (con  $h = 1, \dots, 18$  y  $k = 1, \dots, 18$ ). Supóngase que la densidad espectral de cada uno de estos diferenciales es:

$$f_{kh}(\omega) = \left\{ 4 \sin^2(\omega / 2) \right\}^{-d_{kh}} f_{kh}^*(\omega) \quad (17)$$

---

<sup>2</sup> Nótese como puede haber convergencia incluso siendo el diferencial no estacionario, cuando  $0.5 < b < 1$ .

donde  $d_{kh} \in (-0.5, 0.5)$  y  $f_{kh}^*(\omega)$  es una función par, positiva y continua en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  y acotada. Utilizando el método de estimación empleado anteriormente se han obtenido estimaciones de los órdenes de integración  $d_{kh}$  que se recogen en la Tabla 2. En dicha tabla se presenta, para cada par de regiones, la estimación puntual del orden de integración fraccional del diferencial de inflación entre ambas regiones en la parte superior de la tabla, y el resultado de contrastar a partir de dicha estimación la hipótesis de que el diferencial de inflación es  $I(0)$  en la parte inferior de la tabla. De los resultados presentados en la Tabla 2 destacan dos conclusiones genéricas:

- En primer lugar, ninguno de los parámetros estimados es superior a 0.3 de manera que existe una clara convergencia entre las tasas de inflación regionales.
- Además, puede rechazarse en muchos casos la hipótesis de que el diferencial de inflación sea  $I(0)$ , incluso con un nivel de significación del 1%. Dicho resultado no contradice la convergencia entre tasas de inflación regionales, aunque nos informa de que los diferenciales de inflación presentan, en bastantes casos, un grado de persistencia claramente mayor que el de series  $I(0)$  y, por tanto, dicha convergencia puede ser bastante lenta.

## 5. Conclusiones

Como ya se ha comentado en la introducción, y a pesar de su importancia tanto para la teoría macroeconómica como para la toma de decisiones de política económica, existen en la literatura especializada resultados contradictorios acerca de la estacionariedad o no estacionariedad de las tasas de inflación tanto en este como en otros países, contradicciones que Hassler y Wolters

(1995) han achacado a la restricción de considerar en estos trabajos que las tasas de inflación sólo pueden ser  $I(0)$  o  $I(1)$ .

En este trabajo se ha analizado el grado de persistencia de las tasas de inflación en España a partir de un modelo muy general que permite la existencia de órdenes de integración fraccional.

Aunque el método más utilizado para la estimación del orden de integración fraccional es el propuesto por Geweke y Porter-Hudak (1983), dicho estimador puede estar, en ciertas circunstancias, seriamente sesgado.



**Tabla 2.** Resultados de la estimación del orden de integración fraccional de la diferencia entre tasas de inflación  $Z_{kt}^h = X_{kt} - X_{ht}$

	AND	AR	AST	BAL	CAN	CBR	CLE	CMA	CAT	CV	EXT	GAL	MAD	MUR	NAV	PVA	RIO	CM	
<b>AND</b>	-	0.14	0.19	0.00	0.12	0.00	0.08	0.02	0.15	0.21	0.25	0.16	0.31	0.21	0.17	0.15	0.15	-0.04	
<b>ARA</b>	**	-	0.17	0.08	0.14	-0.12	-0.09	0.27	0.14	0.18	0.17	0.14	0.22	0.18	0.16	0.15	0.15	-0.05	
<b>AST</b>	**	**	-	0.14	0.21	0.11	0.15	0.15	0.00	0.15	0.16	0.20	0.12	0.13	0.29	0.47	0.47	0.11	
<b>BAL</b>			**	-	0.08	0.01	0.22	0.12	0.11	0.14	0.08	0.06	0.15	0.13	0.11	0.11	0.11	-0.16	
<b>CAN</b>		**	*		-	0.06	0.11	0.08	0.13	0.10	0.09	0.13	-0.07	0.00	0.28	0.09	0.14	0.06	
<b>CBR</b>		*	**			-	-0.16	0.04	0.09	0.10	0.03	0.04	0.09	0.10	0.09	0.08	0.09	0.04	
<b>CLE</b>	*		**	*	**	*	-	0.16	0.13	0.15	0.12	0.11	0.17	0.15	0.13	0.12	0.13	0.29	
<b>CM</b>		**	**				**	-	0.12	0.15	0.05	0.04	0.16	0.15	0.12	0.11	0.12	0.02	
<b>A</b>																			
<b>CAT</b>	**	**		**		**	**	**	-	0.09	0.13	0.14	0.09	0.08	0.12	0.14	0.11	0.10	
<b>CV</b>	**	**	*	**		**	**	**		-	0.17	0.25	0.11	0.26	0.10	0.02	0.05	0.10	
<b>EXT</b>	**	**	**				**		**	**	-	0.04	0.20	0.17	0.14	0.12	0.13	0.03	
<b>GAL</b>	*	**	**				**		**	**		-	0.29	0.26	0.18	0.15	0.16	0.03	
<b>MAD</b>	**	**	**	**		**	**	*	*		*		-	0.07	0.08	0.07	0.08	0.09	
<b>MUR</b>	**	**		**		**	**	**			*	**		-	0.05	0.05	0.04	0.10	
<b>NAV</b>	**	**		**		**	**	**	*		**	**			-	0.46	0.17	0.09	
<b>PVA</b>	**	**	**	**		*	**	*	**		**	**			**	-	0.35	0.09	
<b>RIO</b>	**	**	*	**		*	**	*			*	*				*	-	0.09	
<b>CM</b>			**				*		*	*					*			-	

\* Se rechaza la hipótesis de que  $Z_{kt}^h = X_{kt} - X_{ht}$  es I(0) con un nivel de significación del 5%

\*\* Se rechaza la hipótesis de que  $Z_{kt}^h = X_{kt} - X_{ht}$  es I(0) con un nivel de significación del 1%

Por ello, se ha propuesto una extensión paramétrica de dicho estimador que permite reducir dicho sesgo y mejorar sus propiedades como estimador. La aplicación de dicho estimador ha permitido obtener clara evidencia empírica de que las tasas de inflación en España contienen una raíz unitaria en la frecuencia cero, tanto a nivel nacional como a nivel regional. Además se ha comprobado como las tasa de inflación a nivel regional convergen a una tasa de inflación común, aunque a diferentes velocidades.

### Referencias bibliográficas

Agiakloglou, C.; P. Newbold y M. Wohar (1992): "Bias in an estimator of the fractional difference parameter", *Journal of Time Series Analysis* **14**, 235-246.

Barsky, R.B. (1987): "The Fisher hypothesis and the forecastability and persistence of inflation", *Journal of Monetary Economics* **19**, 3-24.

Bernard, A.B. y S.N. Durlauf (1991): "Convergence of international output movements", *NBER Working Papers series* N° 3717.

Bloomfield, P. (1973): "An Exponential model for the spectrum of a scalar linear time series", *Biometrika* **60**, 217-226.

Dickey, D.A. y W.A. Fuller (1981): "Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root", *Econometrica* **49**, 1057-1072.

Diebold, F.X. y G.D. Rudebusch (1989): "Long memory and persistence in aggregate output", *Journal of Monetary Economics* **24**, 189-209.

Geweke, J. y S. Porter-Hudak (1983): "The estimation and application of long memory time series models", *Journal of Time Series Analysis* **4**, 221-238.

Granger, C.W.J. (1966): "The typical spectral shape of an economic variable", *Econometrica* **34**, 150-161.

Granger, C.W.J. (1983): "Some properties of time series data and their use in econometrics model specification", *Journal of Econometrics* **16**, 121-130.

Gradshteyn, I.S. y Ryzhik, I.M. (1965): *Tables of Integrals, Series and Products*. Academic Press, London.

Hassler U. y J. Wolters (1995): "Long memory in inflation rates: international evidence", *Journal of Business and Economic Statistics* **13**, 37-45.

Hurvich, C.M.; R. Deo y J. Brodsky (1998): "The mean squared error of Geweke and Porter-Hudak's estimator of the memory parameter of a long-memory time series", *Journal of Time Series Analysis* **19**, 19-46.

Johnson, N. L. y S. Kotz (1970): *Continuous univariate distributions*. Wiley, New York.

Körner, T. W. (1988): *Fourier Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.

Kirchgässner, G. y J. Wolters (1993): "Are real interest rates stable? An international comparison", in *Studies in Applied Econometrics*, eds. H. Schneeweiss y K.F. Zimmermann. Heidelberg, Physica-Verlag, pág. 214-238.

MacDonald, R. y P.D. Murphy (1989): "Testing for the long run relationship between nominal interest rates and inflation using cointegration techniques", *Applied Economics* **21**, 439-447.

Pons, E. y J. Suriñach (2000): "Estimación del orden de integración fraccional mediante regresión en el dominio de las frecuencias", Documento de Trabajo nº DOCT-00R05, Departamento de Econometría, Estadística y Economía Española. Universidad de Barcelona.

Smith, J.; N. Taylor y S. Yadaf (1997): "Comparing the bias and misspecification in ARFIMA models", *Journal of Time Series Analysis* **18**, 502-527.

Sowell, F. (1990): "The fractional root distribution", *Econometrica* **58**, 495-505.

Wickens, M. y E. Tzavalis (1992): "Forecasting inflation from the term structure: a cointegration approach", *Discussion Paper* **13-92**. Centre of Economic Forecasting, London Business School.

## Anexo 1. Aproximación de modelos ARMA mediante un modelo exponencial

**Lema.** Sea  $g(x)$  una función que cumple las siguientes condiciones:

- (i)  $g(x)$  está definida y tiene un valor único con excepción de un número finito de puntos en el intervalo  $(-L, L)$
- (ii)  $g(x)$  es periódica con período  $2L$
- (iii)  $g(x)$  y  $g'(x)$  son continuas por intervalos en  $(-L, L)$

y se definen los coeficientes de Fourier asociados a esta función como:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

entonces, la siguiente serie converge a  $g(x)$  siempre que  $x$  sea un punto de continuidad de dicha función:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Demostración: Véase, por ejemplo, Körner (1988)

**Teorema:** Sea  $f(\omega)$  la densidad espectral de un proceso ARMA Entonces, para cualquier  $\varepsilon > 0$ ,

existe una sucesión de coeficientes  $\beta_k, k=1, \dots, l_\varepsilon$ , y un parámetro  $\tau$ , tales que:

$$\left| f(\omega) - \frac{\tau^2}{2\pi} \exp \left( 2 \sum_{k=1}^{l_\varepsilon} \beta_k \cos(k\omega) \right) \right| < \varepsilon$$

Demostración. Para demostrar el Teorema es suficiente aplicar el Lema anterior a la función

$g(\omega) = \ln f(\omega)$  en el intervalo  $(-L, L) = (-\pi, \pi)$  ya que se cumplen las condiciones necesarias.

## Anexo 2. Comportamiento del estimador GPHA en muestras finitas

Para analizar las características del estimador GPHA del orden de integración fraccional y compararlas con las del estimador GPH, se ha realizado un ejercicio de simulación. Concretamente, se han generado grupos de 10.000 replicaciones de series generadas a partir de un modelo ARFIMA(1, $d$ ,1):

$$(1 - \phi L)(1 - L)^d X_t = (1 - \theta L) \varepsilon_t$$

con diferentes parámetros y diferente número de observaciones. A continuación, para cada una de las series generadas, se han utilizado el estimador GPH y el estimador GPHA para obtener estimaciones del parámetro  $d$  usando  $m$  valores del periodograma, con  $m = [n^\alpha]$  y diferentes valores de  $\alpha$ .

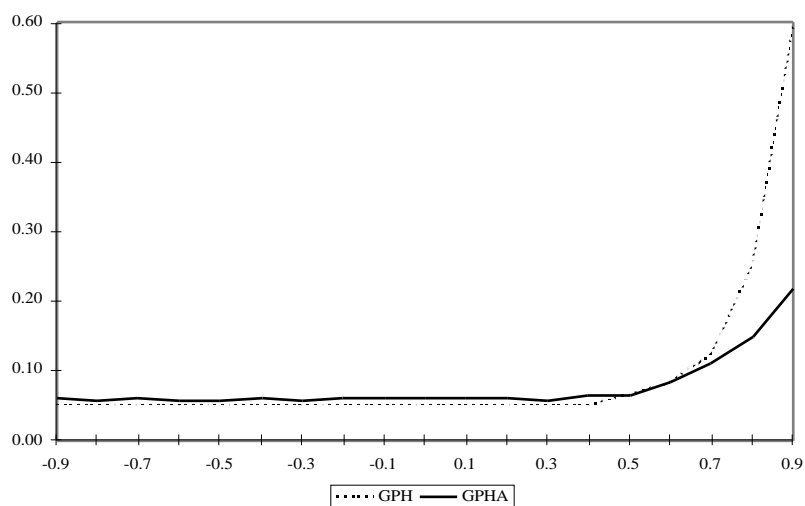
**Tabla A2.1.** Resultados de la estimación de  $d$  a partir de simulación con series de 100 observaciones de procesos AR(1) (10.000 replicaciones).

	GPH						GPHA ( $l=1$ )					
	$\alpha=1/2$		$\alpha=2/3$		$\alpha=3/4$		$\alpha=1/2$		$\alpha=2/3$		$\alpha=3/4$	
$\phi$	media	d.e.	media	d.e.	media	d.e.	media	d.e.	media	d.e.	media	d.e.
-0.90	-0.01	0.30	-0.04	0.18	-0.09	0.15	0.00	0.59	0.01	0.33	0.01	0.26
-0.80	-0.02	0.30	-0.04	0.19	-0.09	0.15	-0.01	0.58	0.00	0.33	0.01	0.26
-0.70	-0.01	0.31	-0.04	0.19	-0.09	0.15	0.00	0.60	0.00	0.33	0.01	0.26
-0.60	-0.01	0.30	-0.04	0.19	-0.09	0.15	0.00	0.60	0.00	0.33	0.01	0.26
-0.50	-0.01	0.30	-0.04	0.19	-0.08	0.15	-0.01	0.60	0.00	0.33	0.01	0.26
-0.40	-0.01	0.31	-0.03	0.19	-0.07	0.15	-0.01	0.60	0.01	0.33	0.01	0.26
-0.30	-0.02	0.30	-0.03	0.19	-0.06	0.15	-0.01	0.60	0.00	0.34	0.00	0.26
-0.20	-0.01	0.31	-0.03	0.19	-0.05	0.15	-0.01	0.59	0.00	0.33	0.00	0.26
-0.10	-0.01	0.30	-0.01	0.19	-0.03	0.15	0.01	0.60	0.00	0.33	0.00	0.26
0.00	0.00	0.31	0.00	0.19	0.00	0.15	0.00	0.59	-0.01	0.34	-0.01	0.26
0.10	0.00	0.31	0.02	0.19	0.03	0.15	-0.01	0.60	0.00	0.34	0.00	0.26
0.20	0.01	0.30	0.04	0.19	0.07	0.15	0.00	0.59	0.00	0.33	0.00	0.26
0.30	0.03	0.30	0.08	0.19	0.13	0.15	-0.01	0.60	0.01	0.33	0.02	0.26
0.40	0.04	0.30	0.13	0.19	0.20	0.15	0.00	0.60	0.01	0.33	0.02	0.26
0.50	0.08	0.30	0.19	0.19	0.27	0.15	0.01	0.59	0.02	0.33	0.01	0.26
0.60	0.13	0.31	0.28	0.19	0.37	0.15	0.01	0.59	0.03	0.34	0.01	0.26
0.70	0.21	0.31	0.40	0.19	0.49	0.15	0.05	0.60	0.05	0.33	0.05	0.26
0.80	0.37	0.31	0.55	0.19	0.64	0.15	0.15	0.59	0.16	0.33	0.17	0.26
0.90	0.71	0.31	0.77	0.19	0.82	0.15	0.43	0.60	0.41	0.33	0.38	0.26

De entre todos los resultados, se presentan a continuación los más significativos. En primer lugar, tiene especial interés analizar las propiedades de estos estimadores cuando se obtienen los datos a partir de un modelo ARMA(1,1), es decir, con  $d=0$ .

De esta manera, los resultados de la Tabla A2.1 permiten comprobar como la utilización del estimador GPH con series generadas a partir del un modelo AR(1) con  $\phi > 0.6$  (y  $T=100$  observaciones) conduce a estimaciones del parámetro  $d$  muy sesgadas. En el Gráfico A2.1 se puede comprobar como este sesgo es lo suficientemente importante como para que en más del 70% de los casos, la utilización del estimador GPH conduce a rechazar la hipótesis nula de que  $d=0$  aunque sea cierta. Por tanto, el contraste de la hipótesis  $d=0$  a partir del estimador GPH presenta una distorsión del tamaño efectivo muy importante.

**Gráfico A2.1.** Porcentaje de rechazos de la hipótesis nula  $d=0$  en series generadas a partir de un modelo AR(1) en función del parámetro  $\phi$  (tamaño efectivo, con nominal del 5%).



En la misma tabla puede comprobarse como este porcentaje se reduce de manera clara si se utiliza el estimador GPHA incorporando un regresor adicional ( $l=1$ ) en el modelo de regresión

aplicado. De todas maneras, aunque la reducción es mucho más importante cuando se utiliza  $\alpha=1/2$  (es decir,  $m=10$ ) que cuando  $\alpha=2/3$  (es decir  $m=21$ ), debe tenerse en cuenta que ello no es debido a las mejores propiedades del estimador por la utilización de un menor número de frecuencias en el modelo de regresión, sino a que con un menor número de frecuencias, se obtiene un estimador con mayor varianza.

Para realizar de manera correcta la comparación entre ambos métodos de estimación debe usarse el estimador GPHA con  $\alpha=2/3$  ya que, en este caso, la varianza de dicho estimador es parecida a la varianza del GPH con  $\alpha=1/2$ . En estas condiciones, se puede comprobar en la Tabla A2.1 como el sesgo del estimador GPHA es claramente menor que el sesgo del estimador GPH. Nótese, además, que a medida que se utiliza un mayor número de frecuencias, el sesgo del estimador GPH aumenta mientras que el sesgo del estimador GPHA disminuye.

**Tabla A2.2.** Resultados de la estimación de  $d$  a partir de simulación con series de 100 observaciones de procesos MA(1) (10.000 repeticiones).

	GPH						GPHA ( $l=1$ )					
	$\alpha=1/2$		$\alpha=2/3$		$\alpha=3/4$		$\alpha=1/2$		$\alpha=2/3$		$\alpha=3/4$	
$\theta$	media	d.e.	media	d.e.	media	d.e.	media	d.e.	media	d.e.	media	d.e.
<b>-0.90</b>	0.01	0.30	0.04	0.19	0.09	0.15	0.00	0.59	0.00	0.33	-0.01	0.26
<b>-0.80</b>	0.01	0.30	0.05	0.19	0.09	0.15	0.00	0.59	-0.01	0.34	-0.01	0.26
<b>-0.70</b>	0.01	0.31	0.04	0.19	0.09	0.15	-0.01	0.60	0.00	0.34	-0.01	0.26
<b>-0.60</b>	0.01	0.30	0.04	0.19	0.08	0.15	0.00	0.60	0.00	0.33	-0.01	0.26
<b>-0.50</b>	0.01	0.30	0.04	0.19	0.08	0.15	-0.01	0.60	-0.01	0.33	-0.01	0.26
<b>-0.40</b>	0.01	0.31	0.04	0.19	0.07	0.15	-0.01	0.60	0.00	0.33	-0.01	0.26
<b>-0.30</b>	0.00	0.30	0.03	0.19	0.06	0.15	-0.01	0.60	-0.01	0.34	-0.01	0.26
<b>-0.20</b>	0.00	0.31	0.02	0.19	0.05	0.15	-0.01	0.59	-0.01	0.33	0.00	0.26
<b>-0.10</b>	0.00	0.30	0.01	0.19	0.02	0.15	0.01	0.60	0.00	0.33	0.00	0.26
<b>0.00</b>	0.00	0.31	0.00	0.19	0.00	0.15	0.00	0.59	-0.01	0.34	-0.01	0.26
<b>0.10</b>	-0.01	0.31	-0.02	0.19	-0.04	0.15	-0.01	0.60	0.00	0.34	0.00	0.26
<b>0.20</b>	-0.02	0.30	-0.05	0.19	-0.08	0.15	0.00	0.59	0.00	0.33	-0.01	0.26
<b>0.30</b>	-0.03	0.30	-0.08	0.19	-0.13	0.15	-0.01	0.59	-0.01	0.33	-0.02	0.26
<b>0.40</b>	-0.05	0.30	-0.13	0.19	-0.19	0.15	0.00	0.60	-0.02	0.33	-0.04	0.26
<b>0.50</b>	-0.08	0.30	-0.19	0.19	-0.28	0.15	-0.01	0.59	-0.04	0.33	-0.09	0.26
<b>0.60</b>	-0.13	0.30	-0.28	0.19	-0.37	0.15	-0.03	0.59	-0.08	0.33	-0.15	0.26

<b>0.70</b>	-0.25	0.30	-0.34	0.19	-0.48	0.15	-0.06	0.59	-0.10	0.33	-0.18	0.26
<b>0.80</b>	-0.42	0.30	-0.49	0.19	-0.52	0.15	-0.11	0.59	-0.14	0.33	-0.19	0.26
<b>0.90</b>	-0.61	0.30	-0.68	0.19	-0.71	0.15	-0.16	0.59	-0.17	0.33	-0.20	0.26

Cuando el proceso generador de los datos (PGD) contiene un parámetro media móvil en lugar de un parámetro autorregresivo las conclusiones son similares. En la Tabla A2.2 se puede comprobar como, nuevamente, el estimador GPHA presenta mejores propiedades que el estimador GPH en este caso.

Hasta el momento, se han analizado las propiedades del estimador GPHA sólo en procesos FI(0). En la Tabla A2.3 se comparan los estimadores GPH y GPHA cuando  $d \neq 0$ .

**Tabla A2.3.** Resultados de la estimación de  $d$  a partir de simulación con series de 100 observaciones de procesos FI( $d$ ) (10.000 replicaciones).

$d$	GPH						GPHA ( $l=1$ )					
	$\alpha=1/2$		$\alpha=2/3$		$\alpha=3/4$		$\alpha=1/2$		$\alpha=2/3$		$\alpha=3/4$	
	media	d.e.	media	d.e.	media	d.e.	media	d.e.	media	d.e.	media	d.e.
<b>-0.45</b>	-0.43	0.30	-0.43	0.19	-0.44	0.15	-0.44	0.59	-0.44	0.33	-0.44	0.26
<b>-0.40</b>	-0.36	0.30	-0.38	0.19	-0.38	0.15	-0.37	0.59	-0.36	0.33	-0.37	0.26
<b>-0.35</b>	-0.34	0.30	-0.33	0.19	-0.34	0.15	-0.33	0.59	-0.33	0.33	-0.33	0.26
<b>-0.30</b>	-0.27	0.31	-0.29	0.18	-0.29	0.15	-0.29	0.59	-0.28	0.33	-0.28	0.26
<b>-0.25</b>	0.24	0.30	-0.25	0.19	-0.23	0.15	-0.25	0.59	-0.24	0.33	-0.25	0.26
<b>-0.20</b>	-0.19	0.30	-0.20	0.19	-0.20	0.15	-0.20	0.60	-0.19	0.33	-0.20	0.26
<b>-0.15</b>	-0.15	0.30	-0.15	0.19	-0.15	0.15	-0.15	0.59	-0.15	0.33	-0.16	0.26
<b>-0.10</b>	-0.10	0.31	-0.10	0.19	-0.10	0.15	-0.10	0.60	-0.10	0.33	-0.10	0.26
<b>-0.05</b>	-0.05	0.30	-0.05	0.19	-0.05	0.15	-0.05	0.60	-0.05	0.33	-0.05	0.26
<b>0.00</b>	-0.01	0.30	0.00	0.19	0.00	0.15	-0.02	0.59	0.00	0.33	0.00	0.26
<b>0.05</b>	0.05	0.30	0.05	0.19	0.05	0.15	0.05	0.59	0.05	0.33	0.05	0.26
<b>0.10</b>	0.10	0.30	0.10	0.19	0.10	0.15	0.10	0.60	0.10	0.33	0.10	0.26
<b>0.15</b>	0.16	0.30	0.15	0.19	0.15	0.15	0.15	0.59	0.15	0.33	0.15	0.26
<b>0.20</b>	0.21	0.30	0.21	0.18	0.21	0.15	0.22	0.59	0.21	0.33	0.21	0.26
<b>0.25</b>	0.25	0.30	0.25	0.19	0.25	0.15	0.25	0.59	0.25	0.33	0.25	0.26
<b>0.30</b>	0.32	0.30	0.31	0.18	0.29	0.15	0.30	0.59	0.31	0.32	0.30	0.26
<b>0.35</b>	0.36	0.30	0.34	0.18	0.33	0.15	0.34	0.59	0.35	0.32	0.35	0.26
<b>0.40</b>	0.40	0.30	0.42	0.19	0.43	0.15	0.41	0.58	0.40	0.33	0.41	0.26
<b>0.45</b>	0.45	0.30	0.46	0.19	0.46	0.15	0.45	0.58	0.45	0.33	0.45	0.26

Estos resultados permiten comprobar como la ampliación del modelo de regresión no provoca la aparición de ningún sesgo adicional significativo en este caso. Además, el aumento de la varianza del estimador derivada de la ampliación del número de regresores puede compensarse con la utilización de un mayor número de frecuencias para reducir dicha varianza.

En este sentido, al utilizar el estimador GPH, el aumento del número de frecuencias utilizadas puede provocar la aparición de un mayor sesgo. En cambio, este aumento del número de frecuencias es posible con el estimador GPHA sin incurrir en un aumento del sesgo gracias, precisamente, a que la presencia de regresores adicionales permiten eliminar el sesgo derivado de la existencia de parámetros de memoria corta.

En definitiva, estos resultados permiten validar, de manera clara, las ventajas de utilizar un modelo de regresión ampliado en el dominio de las frecuencias para minimizar los problemas de sesgo que presenta el estimador GPH en ciertas situaciones.