### When-Issued Markets and Treasury Auctions

Paulo Braulio Coutinho

UCLA

December 12, 2012

◆□ ▶ < 個 ▶ < 目 ▶ < 目 ▶ 3000</p>

- Active when-issued (WI) market for Treasury securities:
  - ▶ 6% of trading activity in the *inter dealer Treasury* market (Fabozzi and Fleming, 2005; Barclay et al, 2006).

▲□▶▲□▶▲≡▶▲≡▶ Ξ|= めぬ⊙

- Active when-issued (WI) market for Treasury securities:
  - ▶ 6% of trading activity in the *inter dealer Treasury* market (Fabozzi and Fleming, 2005; Barclay et al, 2006).
- **Underpricing** Yields on Treasury securities are higher in the auction than in the when-issued market.
  - ► In the order of <sup>1</sup>/<sub>2</sub> to 1 basis point within minutes to the auction (Goldreich (2007), Bikhchandani et al (2000)).
  - ▶ Higher underpricing if prices from previous days are considered (Lou, Yan and Zhang (2011)).

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

# • If the price in the auction is lower, why dealers acquire securities in the when-issued market?

(日)
 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

- Structure of the market:
- Single-price auctions do not allocate securities efficiently.
- Dealers can use WI market to improve allocation.
- Underpricing arises in equilibrium.

# • If the price in the auction is lower, why dealers acquire securities in the when-issued market?

- Structure of the market:
- Single-price auctions do not allocate securities efficiently.
- Dealers can use WI market to improve allocation.
- Underpricing arises in equilibrium.
- When-issued market increases efficiency (allocation).
- Prices in the when-issued market are a biased proxy for the true market value of securities.

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ヨ□ のへで

# Related Literature

- When-issued markets and Treasury auctions
  - Nyborg and Strabulaev (2004); Chatterjea and Jarrow (1998).
- Oivisible good auction.
  - Wilson (1979); Kyle (1989); Back and Zender (1993); Wang and Zender (2002); Ausubel et al (2011); Coutinho (2012)
- Sorward Market and Market Power.
  - Allaz and Vila (1993); Powell (1993), Green (1999).
- Empirical Treasury Auctions:
  - Nyborg and Sundaransen (1996); Malvey and Archibald (1998); Bikhchandani et al (2000); Keloharju et al (2005); Goldreich (2007);

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

### Example: Two Investors, Two securities

# Example

• Two homogeneous Treasury securities.

# Example

- Two homogeneous Treasury securities.
- Two dealers with constant valuation for the securities:

A : (5,5). B : (3,3).

◆□▶ ◆□▶ ◆目▶ ◆目▶ ④○♡

## Example

- Two homogeneous Treasury securities.
- Two dealers with constant valuation for the securities:

 $\begin{array}{rrrr} A & : & (5,5) \, . \\ B & : & (3,3) \, . \end{array}$ 

#### • Auction:

- Bids  $\beta_i = (\beta_i^1, \beta_i^2) \in \mathbb{R}^2_+$  i = A, B.
- Units are allocated to the two highest bids.
- Single-price auction dealers pay the same price  $p^{so} \ge 0$  for acquired units.

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

•  $p^{so} \equiv$  highest rejected bid.

• Claim: There is an equilibrium of the auction where dealers submit:

$$\beta_A = (5,0).$$
  
 $\beta_B = (3,0).$ 

◆□ ▶ < 個 ▶ < 目 ▶ < 目 ▶ 3000</p>

• Why?

• Claim: There is an equilibrium of the auction where dealers submit:

$$egin{array}{rcl} eta_A &=& (5,0)\,. \ eta_B &=& (3,0)\,. \end{array}$$

#### • Why?

Dea. A	Dea. B	Aggregate
5	3	5
0	0	3
		0
		0

#### • Payoff:

$$U_A^0 = (5-0) \times 1 = 5.$$
  
 $U_B^0 = (3-0) \times 1 = 3.$ 

シック・目前・4回・4回・4回・4回・

• Is there any profitable deviation for A?

- Is there any profitable deviation for A?
- What if A acquires both securities?

Dea. A	Dea. B	Aggregate
$\hat{\beta}^1_A$	3	$\hat{\beta}^1_A$
$\hat{\beta}_A^2$	0	$\hat{\beta}_A^2$
		3
		0

- Is there any profitable deviation for A?
- What if A acquires both securities?

Dea. A	Dea. <i>B</i>	Aggregate
$\hat{\beta}^1_A$	3	$\hat{\beta}^1_A$
$\hat{\beta}_A^2$	0	$\hat{\beta}_A^2$
		3
		0

• Payoff with deviation:

$$\hat{U}_A = 5 \times 2 - 3 \times 2$$
$$= 4$$

• Equilibrium is **not** efficient.

◆□ ▶ < 個 ▶ < 目 ▶ < 目 ▶ 目 ○ ○ ○ ○</p>

- Equilibrium is **not** efficient.
- Suppose B sells a WI security to A.
  - ▶ Price  $p^{wi} \in (3, 5)$ .
  - Default penalty  $\pi > 5$ .

- Equilibrium is **not** efficient.
- Suppose B sells a WI security to A.
  - ▶ Price  $p^{wi} \in (3, 5)$ .
  - Default penalty  $\pi > 5$ .
- Claim: Let  $\hat{\pi} \equiv \pi + p^{wi}$ . There is an equilibrium of the auction where dealers submit:

$$egin{array}{rcl} eta_A &=& (5,0)\,. \ eta_B &=& (\hat{\pi},0)\,. \end{array}$$

• Payoffs:

$$egin{array}{rcl} U_A^{wi} = & 10 - p^{wi} & > U_A^0. \ U_B^{wi} = & p^{wi} & > U_B^0. \end{array}$$

(日)
 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

- Equilibrium is **not** efficient.
- Suppose B sells a WI security to A.
  - Price  $p^{wi} \in (3, 5)$ .
  - Default penalty  $\pi > 5$ .
- Claim: Let  $\hat{\pi} \equiv \pi + p^{wi}$ . There is an equilibrium of the auction where dealers submit:

$$egin{array}{rcl} eta_A &=& (5,0)\,. \ eta_B &=& (\hat{\pi},0)\,. \end{array}$$

#### Payoffs:

$$egin{array}{rcl} U^{wi}_A = & 10 - m{
ho}^{wi} & > U^0_A. \ U^{wi}_B = & m{
ho}^{wi} & > U^0_B. \end{array}$$

•  $p^{wi} \in (3,5)$  arises in equilibrium of a double auction in the WI stage.

- Equilibrium is **not** efficient.
- Suppose B sells a WI security to A.
  - Price  $p^{wi} \in (3, 5)$ .
  - Default penalty \(\pi > 5\).
- Claim: Let  $\hat{\pi} \equiv \pi + p^{wi}$ . There is an equilibrium of the auction where dealers submit:

$$egin{array}{rcl} eta_A &=& (5,0)\,. \ eta_B &=& (\hat{\pi},0)\,. \end{array}$$

#### Payoffs:

$$egin{array}{rcl} U_A^{wi} = & 10 - p^{wi} & > U_A^0. \ U_B^{wi} = & p^{wi} & > U_B^0. \end{array}$$

•  $p^{wi} \in (3,5)$  arises in equilibrium of a double auction in the WI stage.

• Underpricing:  $p^{wi} > p^{so}$ .

# Main Model

• Two divisible goods - Treasury securities, q, and Money, m.

- Two divisible goods Treasury securities, q, and Money, m.
- *N* dealers, indexed by  $i \in \mathcal{I} = \{1, ..., N\}$ , with valuation  $V_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ :

◆□▶ ◆□▶ ◆目▶ ◆目▶ ④○♡

• 
$$V_i(q,m) = v_i(q) + m;$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{i}}'(\mathbf{q}) = v_{\mathbf{i}} - \rho \mathbf{q}.$$

- Two divisible goods Treasury securities, q, and Money, m.
- *N* dealers, indexed by  $i \in \mathcal{I} = \{1, ..., N\}$ , with valuation  $V_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ :

◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ ●□□ のQ@

• 
$$V_i(q, m) = v_i(q) + m;$$
  
•  $v'_i(q) = v_i - \rho q.$ 

• Three periods:

t = -1Dealers trade When-issued securities

- Two goods Treasury securities, q, and Money, m.
- *N* dealers, indexed by  $i \in \mathcal{I} = \{1, ..., N\}$ , with valuation  $V_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ :

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ヨ□ のへで

• 
$$V_i(q,m) = v_i(q) + m;$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{i}}'(\mathbf{q}) = v_{\mathbf{i}} - \rho \mathbf{q}.$$

• Three periods:



- Two goods Treasury securities, q, and Money, m.
- *N* dealers, indexed by  $i \in \mathcal{I} = \{1, ..., N\}$ , with valuation  $V_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ :

• 
$$V_i(q,m) = v_i(q) + m;$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{i}}'(\mathbf{q}) = v_{\mathbf{i}} - \rho \mathbf{q}.$$

• Three periods:



### Auction

- Start by characterizing equilibrium in the auction stage.
- History  $h = (p^{wi}, \{\theta_i^{wi}\}_{\mathcal{I}})$  from the WI market:
  - ▶ *p<sup>wi</sup>* price of WI securities.
  - $\left\{\theta_i^{wi}\right\}_{\mathcal{I}}$  WI positions.
- Stochastic quantity  $Q \in \left[\underline{Q}, \overline{Q}\right] \subseteq \Re_{++}$  of a Treasury security.
- Dealer *i* submits a left continuous, weakly decreasing bid schedule  $q_i^A(p,h): \Re_+ \times \mathcal{H} \to \Re_+.$
- Stop-out price:  $ilde{p}^{so}$  such that  $\sum_{\mathcal{I}} q_j^A \left( ilde{p}^{so}, h 
  ight) = ilde{Q}.$
- Single-price auction: dealer *i* gets  $\tilde{\psi}_i^A \equiv q_i^A(\tilde{p}^{so}, h)$  units of the good and pays  $\tilde{\psi}_i^A \times \tilde{p}^{so}$ .

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・



◆□ > ◆□ > ◆目 > ◆目 > ◆目 ◆ ○ < ○ >



◆□ > ◆□ > ◆目 > ◆目 > ◆目 ◆ ○ < ○ >



◆□ > ◆□ > ◆ = > ◆ = > = = の < ⊙



◆□▶ ◆□▶ ◆目▶ ◆目▶ ④○♡



◆□ ▶ ◆□ ▶ ◆三 ▶ ◆□ ▶ ◆□ ▶

# Auction Stage

• Dealer *i* faces the problem:

$$\begin{split} \max_{q_i(\cdot,h)} E\left[ v_i\left(q_i\left(\tilde{p}^{so},h\right) + \theta_i^{wi}\right) - \tilde{p}^{so}q_i\left(\tilde{p}^{so},h\right) \right].\\ \text{subject to } \sum_{\mathcal{I}} q_j^A\left(\tilde{p}^{so},h\right) = \tilde{Q}. \end{split}$$

◆□ > ◆□ > ◆目 > ◆目 > ◆目 ◆ ○ < ○ >

# Auction Stage

• Dealer *i* faces the problem:

$$\begin{split} \max_{q_i(\cdot,h)} E\left[ \mathsf{v}_i\left( q_i\left( \tilde{p}^{so},h \right) + \theta_i^{wi} \right) - \tilde{p}^{so} q_i\left( \tilde{p}^{so},h \right) \right].\\ \text{subject to} \ \sum_{\mathcal{I}} q_j^A\left( \tilde{p}^{so},h \right) = \tilde{Q}. \end{split}$$

#### Proposition

Let  $\gamma \equiv \frac{N-2}{N-1}$  and  $\theta_i^{wi} \leq \overline{\theta^{wi}}$ , in the unique linear equilibrium, dealers submit:

$$q_i^A(P,h) = \frac{\gamma}{\rho} \left( \upsilon_i - P \right) - \gamma \theta_i^{wi}. \tag{1}$$

For a given realization of  $\tilde{Q}$ , the stop-out price satisfies

$$ilde{p}^{so} = ilde{p}^W - 
ho rac{1}{N-2} rac{ ilde{Q}}{N}$$

where  $p^W \equiv Walrasian Price$ 44

# Equilibrium: Auction

• Dealers "shade" their bids:



# Equilibrium: Auction

• Dealers "shade" their bids:



・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
• Dealers "shade" their bids:



・ロト・(日)・(日)・(日)・(日)

• Dealers "shade" their bids:



・ロト・(日)・(日)・(日)・(日)

# No When-Issued

#### Corollary

No when-issued trade, i.e.,  $\theta_i^{wi} = 0$  for  $i \in \mathcal{I} \implies$  the outcome of the auction is not efficient:

$$v_i > v_j \iff \mathsf{v}'_i\left(\tilde{\psi}_i^\mathsf{F}\right) > \mathsf{v}'_j\left(\tilde{\psi}_j^\mathsf{F}\right).$$

• Dealers with higher valuation end up with a higher marginal valuation for the security.

◆□ > ◆□ > ◆三 > ◆三 > 三日 のへで

## No When-Issued



#### Corollary

No when-issued market, i.e.,  $\theta_i^{wi} = 0$  for  $i \in \mathcal{I} \implies$  the outcome of the auction is not efficient:

$$\upsilon_i > \upsilon_j \iff \mathsf{v}_i'\left(\tilde{\psi}_i^F\right) > \mathsf{v}_j'\left(\tilde{\psi}_j^F\right)$$

• Dealers with higher valuation end up with a higher marginal valuation for the security.

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三回■ のへの

#### Corollary

No when-issued market, i.e.,  $\theta_i^{wi} = 0$  for  $i \in \mathcal{I} \implies$  the outcome of the auction is not efficient:

$$\upsilon_i > \upsilon_j \iff \mathsf{v}_i'\left(\tilde{\psi}_i^F\right) > \mathsf{v}_j'\left(\tilde{\psi}_j^F\right)$$

• Dealers with higher valuation end up with a higher marginal valuation for the security.

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三回■ のへの

• Can dealers improve the allocation trading when-issued securities?

#### Corollary

No when-issued market, i.e.,  $\theta_i^{wi} = 0$  for  $i \in \mathcal{I} \implies$  the outcome of the auction is not efficient:

$$\upsilon_i > \upsilon_j \iff \mathsf{v}_i'\left(\tilde{\psi}_i^F\right) > \mathsf{v}_j'\left(\tilde{\psi}_j^F\right)$$

- Dealers with higher valuation end up with a higher marginal valuation for the security.
- Can dealers improve the allocation trading when-issued securities?
- Yes. Larger dealers acquiring WI securities from smaller dealers.
- WI positions affect how much dealers acquire in the auction and their final holdings of securities:

$$\begin{array}{lll} \displaystyle \frac{d\tilde{\psi}_{i}^{A}}{d\theta_{i}^{wi}} & = & \displaystyle -\frac{N-2}{N-1} \\ \displaystyle \frac{d\tilde{\psi}_{i}^{F}}{d\theta_{i}^{wi}} & = & \displaystyle \frac{1}{N-1} \end{array}$$

▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ヨ□ のへで

## No When-Issued



# When-Issued: Auction



・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

# When-Issued Market

• Central inter-dealer broker runs a double auction:

- Central inter-dealer broker runs a double auction:
- Dealer *i* submits a left continuous, weakly decreasing bid schedule  $q_i^{wi}(p) : \Re_+ \to \Re_+$ .
- When-issued price:  $ilde{p}^{wi}$  such that  $\sum_{\mathcal{T}} q_i^{wi}\left(p^{wi}
  ight) = 0$  .
- Dealer *i* gets θ<sup>wi</sup><sub>i</sub> ≡ q<sup>wi</sup><sub>i</sub> (p<sup>wi</sup>) units of the good and pays θ<sup>wi</sup><sub>i</sub> × p<sup>wi</sup>.
   θ<sup>wi</sup><sub>i</sub> < θ<sup>wi</sup><sub>i</sub>.

◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ □□ ��

- Central inter-dealer broker runs a double auction:
- Dealer *i* submits a left continuous, weakly decreasing bid schedule  $q_i^{wi}(p) : \Re_+ \to \Re_+$ .
- When-issued price:  $ilde{p}^{wi}$  such that  $\sum_{\mathcal{T}} q_i^{wi}\left(p^{wi}
  ight) = 0$  .
- Dealer *i* gets  $\theta_i^{wi} \equiv q_i^{wi} \left( p^{wi} \right)$  units of the good and pays  $\theta_i^{wi} \times p^{wi}$ .
- $\theta_i^{wi} \leq \overline{\theta}^{wi}$ .
- Dealers anticipate the equilibrium in the auction will be the linear one described previously.

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

• Dealer *i*'s problem:

$$\begin{split} \max_{q_{i}^{wi}(\cdot)} E\left[v_{i}\left(\psi_{i}^{F}\right) - p^{so}\psi_{i}^{A}\right] - p^{wi}q^{wi}\left(p^{wi}\right)\\ \text{subject to } \sum_{\mathcal{I}} q_{j}^{wi}\left(p^{wi}\right) = 0 \end{split}$$

◆□▶ ◆□▶ ◆目▶ ◆目▶ ●□■ のへ⊙

• Dealer i's problem:

$$\begin{split} \max_{q_{i}^{wi}(\cdot)} E\left[v_{i}\left(\psi_{i}^{F}\right) - p^{so}\psi_{i}^{A}\right] - p^{wi}q^{wi}\left(p^{wi}\right)\\ \text{subject to } \sum_{\mathcal{I}} q_{j}^{wi}\left(p^{wi}\right) = 0 \end{split}$$

#### Proposition

There is a linear equilibrium where dealers submit the following bid schedules in the when-issued market:

$$q_i^{wi}(P) = \frac{\gamma}{\left(1-\gamma\right)^2} \frac{1}{\rho} \left( \rho^{wi} + \left(1-\gamma\right)^2 \rho \theta_i^c - P \right)$$
(2)

The equilibrium price and positions are given by:

$$p^{wi} = (1 - \gamma) E[p^{w}] + \gamma E[p^{so}]$$
  
$$\theta_i^{wi} = \frac{\gamma}{\rho} (\upsilon_i - \bar{\upsilon})$$

(51)

#### Corollary

**Underpricing:**  $p^{wi} > E[p^{so}]$ 

<□> <</p>
<□> <</p>
□> <</p>
□> <</p>
□> <</p>
□> 
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□

#### Corollary

**Underpricing:**  $p^{wi} > E[p^{so}]$ 

• The magnitude of underpricing is given by:

$$p^{wi} - E\left[p^{so}\right] = \frac{1}{\left(N-1\right)\left(N-2\right)}\rho \frac{E\left[Q\right]}{N}$$

<□> <</p>
<□> <</p>
□> <</p>
□> <</p>
□> <</p>
□> 
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□

#### Corollary

**Underpricing:**  $p^{wi} > E[p^{so}]$ 

• The magnitude of underpricing is given by:

$$p^{wi} - E[p^{so}] = \frac{1}{(N-1)(N-2)} \rho \frac{E[Q]}{N}$$

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

• Increasing in the size of the auction  $\frac{E[Q]}{N}$  and slope of the demand  $\rho$ 

#### Corollary

**Underpricing:**  $p^{wi} > E[p^{so}]$ 

• The magnitude of underpricing is given by:

$$p^{wi} - E[p^{so}] = \frac{1}{(N-1)(N-2)} \rho \frac{E[Q]}{N}$$

• Increasing in the size of the auction  $\frac{E[Q]}{N}$  and slope of the demand  $\rho$ 

- Decreasing in the number of dealers, N, even with constant  $\frac{E[Q]}{N}$
- Dealers with higher (lower) than average  $v_i$  will take long (short) positions in the WI market.

(日)
 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)
 (日)

 (日)
 (日)

 (日)
 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)
 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

 (日)

#### • Limits to arbitrage:

What is the payoff of a "sell high and buy low" strategy?

・ロト・4回ト・4回ト・4回ト・4回ト

• Gain: 
$$p^{wi} + \frac{\partial p^{wi}}{\partial \theta_i^{wi}} \theta_i^{wi}$$

• Cost: 
$$p^{so} + \frac{\partial p^{so}}{\partial \psi_i^A} \psi_i^A$$

▶ In equilibrium, net gain =  $-(1 - \gamma) \rho E\left[\frac{Q}{I}\right] < 0$ 



もうてい 正則 スポットポット 白マ

<□> <</p>
<□> <</p>
□> <</p>
□> <</p>
□> <</p>
□> 
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□

• Question frequently asked - What is the revenue loss due to the auction mechanism?

• Question frequently asked - What is the revenue loss due to the auction mechanism?

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三回■ のへの

•  $p^{wi}$  commonly used as a proxy for  $p^W$ 

- Question frequently asked What is the revenue loss due to the auction mechanism?
- $p^{wi}$  commonly used as a proxy for  $p^W$
- Biased towards zero:

$$E\left[p^{wi}-p^{so}
ight] = rac{1}{N-2}E\left[p^{W}-p^{so}
ight]$$

▲□▶▲□▶▲≡▶▲≡▶ Ξ|= めぬ⊙

- Question frequently asked What is the revenue loss due to the auction mechanism?
- $p^{wi}$  commonly used as a proxy for  $p^W$
- Biased towards zero:

$$E\left[p^{wi}-p^{so}\right] = \frac{1}{N-2}E\left[p^{W}-p^{so}\right]$$

 Ranking Single vs. Multiple-price auction mechanisms using when-issued prices may be misleading

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

• e.g. Nyborg and Sundaransen (1996); Malvey and Archibald (1998); Goldreich (2007)

- Question frequently asked What is the revenue loss due to the auction mechanism?
- $p^{wi}$  commonly used as a proxy for  $p^{W}$
- Biased towards zero:

$$E\left[p^{wi}-p^{so}
ight] = rac{1}{N-2}E\left[p^{W}-p^{so}
ight]$$

 Ranking Single vs. Multiple-price auction mechanisms using when-issued prices may be misleading

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

- e.g. Nyborg and Sundaransen (1996); Malvey and Archibald (1998); Goldreich (2007)
  - The equilibrium value of  $p^{wi}$  is affected by the auction mechanism.
  - Future research!

# When-Issued: Sequence of Auctions

◆□▶ ◆□▶ ◆目▶ ◆目▶ ●□■ のへ⊙

# When-Issued: Sequence of Auctions

- T when-issued rounds before the auction.
- Let  $\theta_i^c \equiv \frac{1}{\rho} (v_i \bar{v})$ .

#### Proposition

There is a unique linear sub game perfect equilibrium where dealers submit bid schedules at each period t = -T, ..., 1:

$$q_i^{\text{wi,t}}(P) = \frac{1}{(1-\gamma)^{-2t}} \frac{\gamma}{\rho} \left( A_i^t - P \right) - \gamma \theta_i^{t-1}.$$
(3)

where  ${\sf A}_i^t\equiv {\sf p}^{{\scriptscriptstyle w}i,c}+(1-\gamma)^{-2t}\,
ho heta_i^c$  .

#### Corollary

The when-issued prices  $\{p^t\}_{t=-T}^1$  are the same on all t = -T, ..., 1 and given by

$$p^t = p^{wi}$$
.

(57)

#### When-Issued: Sequence of Auctions

• Positions are build up over the entire when-issued period:

$$\theta_i^t = \gamma \theta_i^c + (1 - \gamma) \theta_i^{t-1}$$

• Volume - Let  $\Upsilon^{T} \equiv \frac{\sum_{i,\tau} (q_i^{w_i,t})^2}{N}$ , in equilibrium,

$$\Upsilon^{T} = s_{v}^{2} \left( \frac{1 - (1 - \gamma)^{T}}{\rho} \right)^{2}$$

where 
$$s_v^2 \equiv \frac{1}{N} \sum (v_i - \bar{v})^2$$
.

#### Corollary

Efficient outcome in the limit. When  $T \to \infty$ ,

$$\tilde{\psi}_{i}^{F} \rightarrow \tilde{\psi}_{i}^{W}$$
.



• First to model the strategic behavior of bidders when they participate in a when-issued market prior to a multiple unit auction.

<□> <</p>
<□> <</p>
□> <</p>
□> <</p>
□> <</p>
□> 
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□

- First to model the strategic behavior of bidders when they participate in a when-issued market prior to a multiple unit auction.
- Market power + Single-Price auction  $\Rightarrow$  When-issued trading + Underpricing.

◆□▶ ◆□▶ ◆三▶ ◆三▶ 三回■ のへの

- First to model the strategic behavior of bidders when they participate in a when-issued market prior to a multiple unit auction.
- Market power + Single-Price auction  $\Rightarrow$  When-issued trading + Underpricing.
- Prices in the when-issued market are a biased proxy to the true market value of the underlying security.

◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ □□ ��

- First to model the strategic behavior of bidders when they participate in a when-issued market prior to a multiple unit auction.
- Market power + Single-Price auction  $\Rightarrow$  When-issued trading + Underpricing.
- Prices in the when-issued market are a biased proxy to the true market value of the underlying security.

◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ ◆□▶ □□ ��

• When-issued market mitigates/vanishes uniform-price inefficiencies.

# Thank you.

◆□ ▶ < 個 ▶ < E ▶ < E ▶ E = 9000</p>




◆□ ▶ ◆□ ▶ ◆三 ▶ ◆□ ▶ ◆□ ▶



◆□▶ ◆□▶ ◆目▶ ◆目▶ ●□■ のへ⊙





(1)

# Equilibrium: When-Issued

- Similar to the auction stage.
- However, marginal valuations functions are different. Remember that:

$$egin{array}{rcl} rac{d ilde{\psi}^A_i}{d heta^1_i}&=&-\gamma\ rac{d ilde{\psi}^F_i}{d heta^1_i}&=&(1-\gamma) \end{array}$$

◆□▶ ◆□▶ ◆目▶ ◆目▶ ●□■ のへ⊙

- Similar to the auction stage.
- However, marginal valuations functions are different. Remember that:

$$egin{array}{rcl} rac{d ilde{\psi}^A_i}{d heta^1_i}&=&-\gamma\ rac{d ilde{\psi}^F_i}{d heta^1_i}&=&(1-\gamma) \end{array}$$

◆□ ▶ ◆□ ▶ ◆三 ▶ ◆三 ▶ ◆□ ▶ ◆○ ◆

• Two effects when increasing  $\theta_i^{wi}$ :

- Similar to the auction stage.
- However, marginal valuations functions are different. Remember that:

$$egin{array}{rcl} rac{d ilde{\psi}^{A}_{i}}{d heta^{1}_{i}} &=& -\gamma \ rac{d ilde{\psi}^{F}_{i}}{d heta^{1}_{i}} &=& (1-\gamma) \end{array}$$

・ロト ・ 日本 ・ 日本 ・ 日本 ・ クタマ

- Two effects when increasing  $\theta_i^{wi}$ :
  - Increases utility by  $v_i'\left(\psi_i^{\mathsf{F}}
    ight) imes\left(1-\gamma
    ight)$

- Similar to the auction stage.
- However, marginal valuations functions are different. Remember that:

$$egin{array}{rcl} rac{d ilde{\psi}_i^{\mathsf{A}}}{d heta_i^1}&=&-\gamma \ rac{d ilde{\psi}_i^{\mathsf{F}}}{d heta_i^1}&=&(1-\gamma) \end{array}$$

・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・
 ・

- Two effects when increasing  $\theta_i^{wi}$ :
  - Increases utility by  $v_i'\left(\psi_i^{\mathsf{F}}
    ight) imes\left(1-\gamma
    ight)$
  - Decreases the cost in the auction stage by  $\gamma \times p^{so}$  (constant)



◆□ > ◆□ > ◆ = > ◆ = > = = の < ⊙



(日) (日) (日) (日) (日) (日) (日)



(2)

◆□> <圖> <E> <E> EIE のQ@

# Sequence of Auctions: Bid Schedules

<□> <</p>
<□> <</p>
□> <</p>
□> <</p>
□> <</p>
□> 
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□
□





◆□ > ◆□ > ◆三 > ◆三 > 三日 のへで



◆□ > ◆□ > ◆三 > ◆三 > 三日 のへで



◆□ > ◆□ > ◆三 > ◆三 > 三日 のへで

**Bid Sequential Auction** 

(3)

◆□▶ ◆□▶ ◆目▶ ◆目▶ ●□■ のへ⊙