EVOLUCIÓN DE LOS ESTADOS DE POBREZA A PARTIR DE SUS TRANSICIONES. EL CASO ESPAÑOL 2004-2008

María Margarita Bahamon Ardila⋆
Juana Domínguez Domínguez†
José Javier Núñez Velázquez‡

Resumen

En este articulo se presenta el enfoque dinámico de la pobreza a través de las transiciones en pobreza utilizando las cadenas de Markov, como modelo básico de partida. En primer lugar, centramos la atención en proponer un modelo que pueda explicar las transiciones entre estados de pobreza a partir de las cadenas finitas y homogéneas de Markov con tres estados; asi mismo, la evolución de la pobreza crónica empezando por tres estados para luego extenderlo a cuatro; por último, se aborda la cuestión relativa a las soluciones de la violación de los supuestos. Se estudia la validez del modelo propuesto utilizando los datos procedentes de la Encuesta de Condiciones de Vida de España para el periodo 2004-2008. En este análisis se propone una variación en la base de datos original a través de sub-paneles.

Los resultados mostraron que las matrices eran homogéneas pero no confirmaban siempre la dependencia markoviana de orden 1, condición que suele ponere en entredicho con frecuencia. Debido a esto, se propuso solventar el problema permitiendo relajar este supuesto y aplicar modelos de matrices de inercia, con el fin de representar la dependencia de la permanencia en los estados en la evolución del modelo.

Adicionalmente, se extendió el modelo para el análisis dinámico de la pobreza crónica, definiendo los pobres crónicos a través del número de años de permanencia en la pobreza. Un cambio importante fue que se propuso una transformación en la base de datos para poder contar con tres subpaneles y así determinar la dinámica de la pobreza.

En este modelo de tres estados (pobre crónico (PC), transitorio (Tr) y no pobre (NA)) se propone y demuestra que existen transiciones imposibles de realizar. Para confirmar sus propiedades y darle más riqueza a la clasificación de los hogares, se amplia a un modelo de 4 estados.

Palabras clave: Cadenas de Markov, Pobreza Crónica, Encuesta de Calidad de Vida en España

Clasificación JEL: I32, C10, O52

⋆ maria.bahamon@javeriana.edu.co
Pontificia Universidad Javeriana.
Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas.
Calle 40 N 6-23 Piso 7 Edificio Gabriel Giraldo, S.J. Bogotá (Colombia).
Tfno.: 571-3208320 extensión 5150.

† juana.dominguez@uah.es
‡ josej.nunez@uah.es
Facultad de CC. EE. y EE. (Universidad de Alcalá).
Plaza de la Victoria, nº2. 28002 - Alcalá de Henares (Madrid)
Tfno.: 91-8854277, 91-8854276, 91-8854280. Fax: 91-8854201.

1. Evolución de los estados de pobreza a partir de sus transiciones. El caso español 2004-2008

El estudio de la dinámica de la pobreza consiste en estudiar el comportamiento de las transiciones a través del tiempo, algunas veces dicho estudio, entre estados, puede hacerse utilizando probabilidades, o bien analizando episodios completos de estancia en la pobreza incluyendo su duración, entre otros. Una aproximación a estas transiciones puede evaluarse a través de la movilidad de los ingresos, en otras ocasiones se busca determinar la tipología de los pobres, es decir, definir si los pobres son crónicos o transitorios, por ejemplo. En este articulo se va a estudiar empíricamente la dinámica de la pobreza proponiendo metodologías que se basan en las cadenas de Markov y algunas de sus extensiones.

El estudio de la dimensión dinámica de la pobreza puede considerarse un tema reciente en la literatura. Sin embargo, no ha sido así en otros campos como la Economía Laboral, en donde se ha venido evaluando desde hace algún tiempo fenómenos como la duración en el desempleo o la movilidad laboral, por ejemplo.

EL análisis de la dinámica de la pobreza ha estado marcado por el enfoque iniciado por Bane y Ellwood (1986) y Stevens(,1994 1995 y 1999) quienes estimaron la duración de la pobreza a partir de las entradas y salidas en ese estado en un periodo, para luego ampliarlas al caso de multiples periodos, es lo que suele denominarse episodios de pobreza.

En España, muchos de los trabajos que estudian la dinámica de la pobreza se basan en este enfoque. El objetivo, en ese caso, es encontrar las tasas de entrada y salida de la pobreza (Cantó 1995), así como su duración, (Arranz y Cantó 2008), mientras que otras aproximaciones tienen en cuenta los modelos de duración de un estado a través de múltiples periodos.

En cambio, el análisis dinámico de la pobreza a través de la metodología de markoviana no ha tenido una tratamiento extenso. En España, autores como Bárcena et al. (2006) han propuesto el uso de cadena de Markov de segundo orden y Domínguez (2003) ha estudiado la pobreza utilizando cadenas de primer orden.

En este trabajo se desarrolla una de las líneas de investigación propuesta por Domínguez (2003). De esta manera, se intenta aplicar la definición de los estados de pobreza y evaluar el comportamiento de los modelos basados en las cadenas de Markov.

El articulo se encuentra organizado de la siguiente manera. En la siguiente sección (2), se presenta la metodología utilizada que, en este caso, son las cadenas de Markov en tiempo discreto. En la sección 3 se presenta la base de datos, correspondiente a la Encuesta de Condiciones de Vida (*ECV*), que será utilizada. En la sección 3.1 se examina la literatura sobre las distintas definiciones de cronicidad con especial enfásis en la de Foster (2007). En la sección 3.2 se propone y analiza un modelo básico para estudiar la evolución reciente de la pobreza crónica en España, cuyos supuestos se relajan en la sección 4. Finalmente, en la sección 5 se presentan las principales conclusiones.

2. Análisis de la evolución de aspectos de la pobreza mediante Cadenas de Markov

Dentro de la teoría general de los procesos estocásticos, las cadenas de Markov son un tema obligado debido a su relevancia. A continuación, se presentan de manera resumida los conceptos y líneas de desarrollo básicos en estos modelos[1]

Un proceso estocástico se denomina una cadena si es una sucesión de variables aleatorias discretas y por tanto, el conjunto de índices T (donde varía el tiempo) y el espacio de estados S (el conjunto de valores de las variables aleatorias) son discretos.

Un proceso de Markov es aquel en el cual las variables aleatorias $\{X_t, t \in T\}$[2] son dependientes pero en un sentido especial, que podemos denominar markoviano, que puede expresarse deciendo que la [...] "ley de probabilidad en el futuro sólo depende del estado actual en el que se encuentra, olvidando cómo llegó hasta el mismo; es decir, que de toda la historia conocida del proceso, sólo interviene el instante más reciente"[...] Núñez (2010). Es decir, un proceso estocástico general $\{X_t, t \in T\}$ es de Markov cuando, en términos de funciones de distribución, se tiene que:

$$F_{t_n}(X_{t_n} = x_n / X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2 \dots X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = F_{t_n}(X_n / X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$$
$$\forall X_1, X_2, \dots X_n \in S, \quad \forall t_1, t_2, \dots t_n \in T : t_1 < t_2 \dots < t_n$$

A veces, también se les llama procesos de Markov de orden 1, para enfatizar el número de instantes que recuerdan del historial pasado. Esto permite ampliar la definición dependiendo del número de instantes recientes que el proceso utiliza, apareciendo procesos de Markov de orden 2, 3, y así sucesivamente, en orden creciente de complejidad. En la práctica, sólo suelen utilizarse procesos de Markov de orden 2 como máximo (Shorrocks 1976; Bárcena et al. 2006).

Si el Tiempo es continuo y S es discreto, se obtienen las *cadenas de Markov en tiempo continuo*, mientras que si S es continuo aparecen los *procesos de Markov*, los cuales pueden estar tanto en tiempo continuo como discreto, según sea el conjunto T.

[1] La teoría básica de las cadenas de Markov es bastante conocida y puede ampliarse a partir de gran cantidad de referencias, como por ejemplo Vélez (1991).

[2] En general para estudiar pobreza, el intervalo de tiempo está limitado ($T = \{1, 2, \dots N\}$) y, por tanto, se trata de cadenas finitas. Sin embargo, en general su campo de variación podría ser ilimitado.

Por lo tanto, una cadena de Markov es una sucesión $\{X_t, t = 1, 2 \ldots\}$ de variables aleatorias que verifique las siguientes propiedades (Vélez 1991):

- Son discretas[3], es decir, que toman valores en un conjunto finito o infinito numerable, que se denominará el espacio de estados S;
- Verifica la condición de Markov:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j \diagup X_0 = i_0, X_1 = i_1 \ldots X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j \diagup X_n = i), \\ \forall n \in T \quad y \quad \forall i, j \in S \end{aligned} \tag{1}$$

Los valores $P(X_{n+1} = j \diagup X_n = i)$ representan las leyes probabilísticas que rigen el movimiento y que son en general función de $i, j \in S, \quad n \in T$. Se denominan *probabilidades de transición* entre n y $n+1$.

La cadena de Markov es un proceso aleatorio, donde la posición de las variables se modifica en las sucesivas etapas $n \in T$, de manera que la variable X_n indica la posición de la cadena después de la etapa n-ésima o en el instante n. Este movimiento puede seguirse mediante las probabilidades condicionadas:

$$P_{ij}^{m,n} = P(X_n = j \diagup X_m = i) \quad \forall i, j \in S \quad y \quad n, m \in T : m < n \tag{2}$$

que se denominan *probabilidades de transición* entre los instantes m y n y son funciones de $i, j \in S$. Estas matrices incluyen la información probabilística sobre todas las transiciones que puede efectuar la cadena entre esos instantes. Por otra parte, la posición de la cadena en cada instante X_t viene determinada por la función de cuantía que se denomina vector de estado:

$$V_n = P(P_i(n), i \in S)$$

donde $P_i(n) = P(X_n = i), \quad i \in S$.

Todas las $P_{ij}^{m,n}$ constituyen la *matriz de transición* entre los instantes n y m: $P(m,n) = (P_{ij}^{m,n}; i, j \in S)$, y satisfacen las siguientes propiedades[4]:

1. $P(m,n)$ es una matriz estocástica $\forall m, n \in T : m < n$.

   Es decir, que todos sus elementos son no negativos y la suma de cada una de las filas es igual a la unidad.
2. $V_n = V_m \cdot P(m,n), \forall m, n \in T : m < n$.
3. Ecuación de Chapman -Kolmogorov:

   $P(m,n) = P(m,r)P(r,n), \forall m, r, s \in T : m < r < s$
4. $P(m,n) = P(m,m+1) \cdot P(m+1,m+2) \ldots P(n-1,n), \forall m, n : m < n$

Si estas probabilidades dependen únicamente de la diferencia entre los instantes ($n - m$ y no de n y m) se obtiene una cadena de Markov *homogénea*, de modo que:

$$P_{ij}^{m,n} = P(X_n = j \diagup X_m = i) = P(X_{n-m} = j \diagup X_0 = i) = P_{ij}^{(n-m)} \quad \forall n, m \in T : m < n \tag{3}$$

[3] En este caso se utiliza una cadena discreta por la forma de la encuesta que se utiliza (Encuesta de Condiciones de Vida, *ECV*) y que es analizada más adelante.

[4] Las demostraciones se pueden encontrar en Núñez (2010), Vélez (1991)

En particular, las transiciones de una sola etapa quedan[5]:

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j \diagup X_n = i) = P(X_{m+1} = j \diagup X_m = i) \quad \forall n, m \in T \tag{4}$$

Por lo tanto, si la cadena es homogénea, la propiedad 4 anterior conduce a:

$$P(m,n) = P \cdot P \ldots P = P^{n-m} \qquad \forall m, n \in T : m < n$$

Y en particular: $P(0,n) = P^n, \forall n \in T$.

Una cadena $\{X_n, n \in T\}$ posee una distribución estacionaria o vector estacionario de estados (π) cuando el vector inicial (o vector generador V_0) coincide con π, el resto de vectores de estados también lo hace, es decir:

$$V_0 = \pi \Longrightarrow V_t = \pi, \quad \forall t \in T$$

En este sentido, si una cadena comienza en la distribución estacionaria ya no la abandona. Se puede obtener dicha distribución (si es que existe) resolviendo el sistema:

$$\pi = \pi.P$$

$$\sum_{i \in S} \pi_i = 1$$

Si suponemos que la cadena homogénea de Markov tiene una distribución estacionaria (π), se pueden diferenciar dos casos:

- El vector inicial de estados coincide con la distribución estacionaria ($V_0 = \pi \Longrightarrow V_t = \pi \quad t \in T$) de manera que la cadena se denomina *estacionaria*.
- Si el vector inicial no coincide con la distribución estacionaria ($V_0 \neq \pi$) se puede esperar que la cadena acceda a π en el límite y, en este caso, la cadena será *ergódica*.

Una cadena en la que:

$$\exists n \in T : P_{ij}^{(n)} > 0 \quad \forall i, j \in S$$

Se denomina *regular* (Mateos-Aparicio 1995). Estas cadenas son siempre ergódicas. Por lo tanto, existe una única distribución estacionaria, que se alcanza al menos a largo plazo[6].

Finalmente, la distribución estacionaria se puede obtener teniendo en cuenta el componente discreto de la cadena. De esta manera, la solución del sistema de ecuaciones puede tener en cuenta la matriz de intensidades de transición (Q) o la matriz de transición P^* de la cadena discreta $\{Y_n, n = 1, 2, \ldots\}$, definida por el estado que visita la cadena tras el salto n-ésimo, que será una cadena de Markov por serlo la original y cuya matriz de transiciones será P^* :

$$0 = \pi.Q$$

$$\sum_{i \in S} \pi_i = 1$$

Cuando se tiene en cuenta el componente discreto, Y_n, la distribución estacionaria π^* se obtiene como solución del sistema:

[5] A veces, esta propiedad es la que sirve de definición a las cadenas homogéneas

[6] La demostración se puede encontrar en Vélez (1991).

$$\pi^* = \pi^*.P^*$$

$$\sum_{i\in S}\pi_i^* = 1$$

La relación entre π y π^* está dado por:

$$\pi_j^* = \frac{\pi_j.q_j}{\sum\limits_{i\in S}\pi_i.q_i}, j\in S$$

$$\pi_j = \frac{\pi_j^*/q_j}{\sum\limits_{i\in S}\pi_i^*/q_i}, j\in S \tag{5}$$

Resumiendo, puede admitirse que las cadenas de Markov imponen tres supuestos básicos (Hierro y Guijarro 2007):

1. Dependencia markoviana de orden 1: Implica que la posición del estado actual depende solamente del instante de tiempo anterior;
2. Homogeneidad de la población: Todos los individuos que se estudian presentan el mismo comportamiento;
3. Homogeneidad en el tiempo: Implica que las probabilidades de transición permanecen constantes en el tiempo.

3. Datos utilizados y decisiones metodológicas

Los datos que se utilizarán corresponden a la Encuesta de Condiciones de Vida (*ECV*) para el periodo 2004-2008. Esta encuesta se desarrollo por el Instituto Nacional de Estadística (INE) dentro del marco de las encuestas realizadas en los países de la Unión Europea, y surge para sustituir al Panel de Hogares de la Unión Europea (PHOGUE) que se había venido realizando desde 1994 a 2001.

Tal y como el propio INE reseña: "El objetivo fundamental de la *ECV* es disponer de una fuente de referencia sobre estadísticas comparativas de la distribución de ingresos y la exclusión social en el ámbito europeo" (INE 2005).

Concretamente, en esta encuesta, se busca producir sistemáticamente datos sobre la renta, los niveles de pobreza de los hogares y las condiciones de vida de los ciudadanos de los países miembros. Los datos que se obtienen, tanto a nivel transversal como longitudinal, son comparables y actualizados a nivel nacional y europeo.

Esta encuesta tiene una periodicidad anual y se dispone de datos a partir del año 2004. Es un panel rotante con cuatro submuestras independientes donde cada una de ellas tiene una duración de cuatro años y renovándose cada año la muestra de uno de los paneles.

De acuerdo con lo expuesto, una característica de la *ECV* es que, en el periodo 1, que en nuestro caso es el año 2004, toda la muestra es nueva, y cada año se renueva una cuarta parte. Por lo anterior, es importante referirse a los periodos como primero, segundo y sucesivos. Para la selección de cada submuestra se sigue un diseño bietápico con estratificación de las unidades de primera etapa.

La *ECV* proporciona información sobre ingresos de los hogares privados (HY002-HY025); situación económica (HY040-HY145N, RB010-RB240; pobreza, privación, protección mínima e igualdad de trato (HS010-HS190); empleo y actividad (PL030-PL210L); cuidado de niños (RL010-RL070); jubilaciones, pensiones y situación socioeconómica de las personas de edad (PY100N,PY); vivienda, costes asociados (HH010-HH090; desarrollo regional, movimientos migratorios (DB40, PL170); nivel de formación (PE010-PE040), salud y efectos de ambos sobre la condición socioeconómica (PH010-PH070) y otros temas abordados en módulos secundarios.(Módulos HX020-HX240 y PX150).

Supondremos que la línea de pobreza corresponde al 60 % de la renta mediana, como propone EUROSTAT, y se utilizará la escala de equivalencia de la OCDE, para definir las rentas equivalentes que incorporan las economías de escala de los hogares.

3.1. Pobreza crónica y transitoria

Cuando dos países tienen la misma tasa de incidencia de pobreza, es posible que se requieran distintas políticas o estrategias de reducción de la misma, basándose en la composición de pobreza crónica y transitoria; por ello entender el tipo de pobreza presente en un país le permite a las autoridades respectivas elaborar políticas encaminadas a solucionar cada problema específico (Shepherd 2007).

Para poder separar los conceptos de pobreza crónica y transitoria hay dos aproximaciones. La primera define la cronicidad en términos de ingresos, es decir, determinando distintos umbrales y definiendo si el ingreso de los hogares es o no suficiente para superarlos, y la segunda incorpora el tiempo, o duración, que permanece un hogar en cierto estado[7].

Foster y Santos(2006,2009) definen, como primer enfoque, el de los componentes (*components approach*) que postula descomponer el ingreso (o consumo) de los hogares en un componente permanente y en otro transitorio[8], de manera que los pobres crónicos son aquellos cuyo componente permanente se encuentra por debajo de la línea de pobreza. Como segundo enfoque proponen, el de los episodios (*spells approach*) que determina a los pobres crónicos en función del número de años que sufren la pobreza.

Yaqub (2003) también señala dos formas de medir la cronicidad, la primera lo hace a través de la duración (siempre pobre) y la otra lo hace según el déficit (teniendo en cuenta el ingreso permanente). Sin embargo, Shepherd (2007) señala tres formas posibles para identificar la pobreza crónica: pobreza de largo plazo - los hogares o individuos permanecen en la pobreza si las condiciones externas permanecen inalteradas, pobreza

[7] Hay otras aplicaciones en las cuales los pobres crónicos no sólo dependen de la duración y del umbral de pobreza. Aaberge y Mogstad (2007) proponen una medida alternativa interpersonal comparable con las medidas de ingreso permanente utilizadas para definir y medir la pobreza crónica. Baulch y Masset (2003) investigan si los indicadores monetarios y no monetarios muestran lo mismo sobre la pobreza crónica. Para ello, utilizan la base de datos de Vietnam y definen un pobre crónico como aquel que, además de ser pobre en términos económicos (pobre, no pobre y pobre en comida).Yaqub (2002) define dos tipos de pobreza, la pobreza crónica absoluta (CAP, por sus siglas en inglés) como la persistencia del pobre y la pobreza crónica relativa (CRP) como la persistencia del más pobre.

[8] Una aplicación de este método se puede encontrar en Jalan y Ravallion (1998 y 2000).

de toda la vida - los individuos experimentan la pobreza durante toda su vida y la pobreza intergeneracional- la pobreza se transmite de padres a hijos a través de las condiciones durante la niñez, juventud y mediante las herencias.

Cuando se refiere a la carencia de ingresos con respecto a cierto nivel, los investigadores determinan los umbrales que consideran adecuados para el fenómeno que desean estudiar, ya que no existe acuerdo sobre cuales utilizar. Por ejemplo, Bárcena et al. (2006) define los estados de pobreza severa y pobreza sobre la renta mediana. Para determinar si la pobreza es severa o no, determinan los umbrales del 30 % y 60 % de dicha renta. Por su parte, en Dennis y Guio (2003) proponen utilizar como indicador de profundidad de la pobreza diferentes valores (40 %, 50 % y 70 %) para así confirmar que no hay una concentración mayor de pobres justo en el 60 % de la renta mediana.

Whelan y Maître (2007) utilizan cuatro estados para analizar la dinámica de la vulnerabilidad económica; el estado 1 corresponde a los ingresos menores al $50\,\%$ de la renta mediana, el estado 2 a aquellos que se encuentran entre el $50\,\%$ y $60\,\%$ de la renta mediana, el estado 3 se sitúa entre el $60\,\%$ y $70\,\%$ de la renta mediana y, finalmente el estado 4 como los ingresos mayores al $70\,\%$ de la renta mediana.

Foster y Santos (2006) proponen definir a los pobres crónicos como aquellos individuos u hogares cuya media de las potencias de orden β de los ingresos se encuentra por debajo de la línea de pobreza, es decir, $\mu_\beta^i < Z$, de manera que el número de pobres crónicos dependerá del valor asignado a β.[9].

Por otro lado, en el *Chronic Poverty Research Center (CPRC)* definen a los pobres crónicos como aquellas personas que han permanecido en un estado de pobreza por un largo periodo de tiempo o desde su nacimiento pero sin embargo, a la hora de aplicarlo es necesario definir los puntos de corte respecto a la mediana, de manera que es posible decir que la elección depende del criterio del investigador. Por ejemplo, en el trabajo de Hulme, Moore, y Shepherd (2001), del *Chronical Poverty Research Centre*(CPRC), consideran que es razonable definir un pobre crónico como aquel que ha permanecido durante 5 años en esta situación. A pesar de parecer un periodo arbitrario, lo justifican a través de tres razones. La primera es que 5 años se puede considerar, en diferentes culturas, como un largo periodo de tiempo de la vida de los individuos; segundo, la base de datos que utilizaron tenía una brecha de cinco años entre la recolección y el ejercicio y, tercero, aplicaciones empíricas demostraron que los individuos que permanecían 5 años o más en la pobreza, tenían una alta probabilidad de permanecer en ella por el resto de sus vidas.

Aunque Biewen (2006) define que las repetidas entradas a la pobreza con periodos intermitentes sobre la línea de pobreza también pueden ser interpretadas como cronicidad, define a los pobres crónicos como la subpoblación de individuos que son pobres en cinco o más años de los diez estudiados.

Hulme y Shepherd (2003) se reafirman en la definición de cronicidad respecto a los 5 años; sin embargo, extienden la definición a otros indicadores distintos al ingreso, consumo o gasto, como son la nutrición o los activos, o a través de combinaciones de indicadores. Expone que la manera de estudiar la pobreza crónica es

[9]Nótese que la probabilidad de ser pobre decrece a medida que β crece. Este resultado se confirma en la aplicación empírica que hacen para Argentina (Foster y Santos 2009)

utilizando el enfoque de los "spells"[10] o el enfoque de los componentes[11].

Foster (2007) propone un enfoque que se basa en el porcentaje de tiempo que una persona permanece en la pobreza (τ). Utiliza dos umbrales, el primero corresponde a la línea de pobreza para definir si el individuo es pobre o no lo es, y la segunda es la línea de duración que especifica la fracción mínima de tiempo que debe estar en la pobreza para poder considerarse como un pobre crónico. Para un periodo $T = 4$ propone los valores de τ de $0.25; 0.5; 0.75$ y 1 [12].

Consideramos que la propuesta de Foster (2007) es adecuada para aplicarla en nuestro estudio ya que cumple los axiomas deseados para los indicadores y utiliza los dos enfoques de cronicidad. Sin embargo, frente a todas los anteriores aproximaciones a este concepto, en este articulo se propone un modelo dinámico, basado en las transiciones entre estados de pobreza, para estudiar la cronicidad a partir de las definiciones de Foster (2007) que se desarrollan en los epígrafes que siguen.

3.2. Modelo básico para la evolución de la pobreza crónica en España durante 2004-2008

El modelo básico para estudiar la evolución de la cronicidad de la pobreza en España, con los datos más recientes disponibles se puede encontrar en Bahamón (2010).

En este articulo, para hacer frente al concepto de pobreza crónica, se definieron tres subpaneles. El primero corresponde al compuesto por los años 2004-2006, que notaremos simplemente por subpanel 2006; el segundo subpanel está compuesto por los años 2005, 2006 y 2007 (subpanel 2007) y finalmente el subpanel 3 que tiene en cuenta los años 2006-2008 (subpanel 2008).

En estas condiciones, se utilizará una definición de cronicidad basada en Foster (2007). De esta manera, los pobres serán aquellos hogares cuya renta es menor o igual a la línea de pobreza durante 3 periodos consecutivos($\tau = 3$, en notación de Foster (2007)) de manera que se pueden plantear tres estados de pobreza en cada uno de los subpaneles obtenidos:

1. Pobre crónico[13] (PC): Se define como aquel hogar que durante los tres periodos ha sido pobre;
2. Pobres transitorios (*Tr*): Aquellos hogares que han entrado y salido de la pobreza durante el periodo comprendido en el subpanel y;
3. No pobres (NA): Hogares que no han experimentado nunca la pobreza, a lo largo de los tres periodos.

Por lo tanto, si se considera el proceso estocástico determinado por las situaciones en los tres subpaneles: $X_t =$ "situación de pobreza del hogar", $t = 2006, 2007, 2008$

[10]Según el autor, este enfoque corresponde más a la idea intuitiva de la pobreza crónica como pobreza persistente
[11]En este caso la idea corresponde a la profundidad de la pobreza.
[12]Utilizado en Cantó, Gradín, y Del Rio (2008) como el indicador de Pobreza Crónica Pura.
[13]A partir de este momento, toda referencia a los pobres crónicos tiene que ver con la permanencia en la pobreza y no con la carencia de ingresos.

Tenemos que el espacio de estados definido es $S = \{PC, Tr, NA\}$ y el conjunto de índices $T = \{2006, 2007, 2008\}$. Así pues, $\{X_t, t \in T\}$ es una cadena finita.

Dado que cada uno de los subpaneles cubre 3 años, las posibles combinaciones de situaciones anuales de pobreza (1) o no pobreza (0) en relación con los estados definidos en cada subpanel son:

Cuadro 1: Combinaciones de Pobreza y No Pobreza de un subpanel

Año1	Año2	Año3	Estado
1	1	1	Pobre Crónico (PC)
1	0	0	Pobre Transitorio (Tr)
0	1	0	Pobre Transitorio (Tr)
0	0	1	Pobre Transitorio (Tr)
1	1	0	Pobre Transitorio (Tr)
1	0	1	Pobre Transitorio (Tr)
0	1	1	Pobre Transitorio (Tr)
0	0	0	No Pobre (NA)

1: Pobre; 0: No Pobre Elaboración propia con datos de la *ECV*

Las frecuencias obtenidas en los subpaneles y los tamaños muestrales asociados a los estados son similares, por lo cual se espera que los resultados se deban a las diferencias de los hogares.

En las condiciones descritas, el modelo básico que se propone es el de una cadena finita y homogénea de Markov, asumiendo que el estado de pobreza mostrado en cada subpanel depende sólo del estado más reciente conocido que, en este caso, será el del subpanel anterior. Además, la homogeneidad obligaría a asumir que las matrices de transición entre subpaneles consecutivos fuesen idénticas.

Pasamos a enunciar y demostrar un resultado general con respecto a las matrices de transición del modelo básico propuesto.

Proposición 3.1 [14]**.** *En las condiciones del modelo básico anterior, sea $P(t, t+1)$ la matriz de transición entre los subpaneles t y $t+1$, asociada a la cadena $\{X_t, t \in T\}$. Entonces:*

a) $P[X_{t+1} = NA \diagup X_t = PC] = 0, \quad t = 2006, 2007$

b) $P[X_{t+1} = PC \diagup X_t = NA] = 0, \quad t = 2006, 2007$

Demostración.

Cada combinación de los subpaneles, que genera los estados, puede definirse mediante un triple del conjunto siguiente (teniendo en cuenta que incorpora información de tres años, el de referencia y los dos anteriores):

$$S_t = \{(i_{t-2}, j_{t-1}, k_t), \quad i, j, k = 0, 1\}, \quad t = 2006, 2007,$$

de acuerdo con las combinaciones y equivalencias del cuadro 1, donde 1 indica situación de pobreza y 0 lo contrario. Así pues,

a) $P_{PC,NA} = [X_{t+1} = NA \diagup X_t = PC] =$

$= P_S[(i_{t-1}, j_t, k_{t+1}) = (0,0,0) \diagup (i_{t-2}, j_{t-1}, k_t) = (1,1,1)] =$

[14]Este resultado es válido para cualquier conjunto de índices T, si se dispone de la información precisa para su construcción.

$= P_S[\emptyset] = 0, \quad t = 2006, 2007$

b) $P_{NA,PC} = [X_{t+1} = PC \diagup X_t = NA] =$

$= P_S[(i_{t-1}, j_t, k_{t+1}) = (1,1,1) \diagup (i_{t-2}, j_{t-1}, k_t) = (0,0,0)] =$

$= P_S[\emptyset] = 0, \quad t = 2006, 2007$

□

De manera que la matriz de transición, teniendo en cuenta la proposición anterior, queda definida como:

$$P = \begin{array}{c} \\ PC \\ Tr \\ NA \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} PC & Tr & NA \end{array} \\ \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ 0 & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \end{array} \tag{6}$$

Siendo $1 = PC; \quad 2 = Tr; \quad 3 = NA.$

Se observa que la matriz presenta cierta simetría en cuanto al acceso a los estados de pobreza crónica y no pobreza, pudiendo observarse además de:

$$P_{11} = 1 - P_{12}$$

$$P_{33} = 1 - P_{32}$$

$$P_{22} = 1 - P_{21} - P_{23}$$

En cuanto al comportamiento del modelo, es crucial el resultado que se enuncia y demuestra a continuación:

Teorema 3.1. *En las condiciones anteriores, sea P la matriz de transiciones de la cadena finita con tres estados, que supondremos homogénea, en la forma de 6, con:*

$$1 = PC; 2 = Tr; 3 = NA$$

Supóngase además que:

a. $P_{ij} > 0, \forall i, j \in S : i \neq j$[15]

b. $\exists i \in S : P_{ii} > 0$

Entonces, $\{X_t, t \in T\}$ es regular y el vector límite es:

$$\pi_1 = \frac{P_{21}(1 - P_{33})}{P_{21}(1 - P_{33}) + (1 - P_{11})(1 - P_{33}) + P_{23}(1 - P_{11})}$$

$$\pi_2 = \frac{(1 - P_{11})(1 - P_{33})}{P_{21}(1 - P_{33}) + (1 - P_{11})(1 - P_{33}) + P_{23}(1 - P_{11})}$$

[15]Lógicamente, a excepción de las probabilidades nulas contempladas en la Proposición 3.1.

$$\pi_3 = \frac{P_{23}(1-P_{11})}{P_{21}(1-P_{33})+(1-P_{11})(1-P_{33})+P_{23}(1-P_{11})}$$

Demostración. ***i.*** Supóngase que $P_{22} > 0$, entonces:

$P_{22}^{(4)} \geq P_{22}^4 > 0$
$P_{jj}^{(4)} \geq P_{j2}P_{22}^2P_{2j} > 0, \quad j = 1,3$

Por otra parte:

$P_{j2}^{(4)} \geq P_{j2}P_{22}^3 > 0, \quad j = 1,3$

$P_{2j}^{(4)} \geq P_{22}^3P_{2j} > 0, \quad j = 1,3$

$P_{13}^{(4)} \geq P_{12}P_{22}^2P_{23} > 0; \quad P_{31}^{(4)} \geq P_{32}P_{22}^2P_{21} > 0$

Por lo tanto, $P_{ij}^{(4)} > 0, \quad \forall i,j \in S$

ii. Supóngase que $P_{11} > 0$, entonces:

$P_{11}^{(4)} \geq P_{11}^4 > 0$
$P_{jj}^{(4)} \geq P_{j1}P_{11}^2P_{1j} > 0, \quad j = 2,3$

Además,

$P_{12}^{(4)} \geq P_{11}^3P_{12} > 0; \quad P_{21}^{(4)} \geq P_{21}P_{11}^3 > 0$
$P_{31}^{(4)} \geq P_{32}P_{21}P_{11}^2 > 0; \quad P_{13}^{(4)} \geq P_{11}^2P_{12}P_{23} > 0$

$P_{32}^{(4)} \geq P_{32}P_{21}P_{11}P_{12} > 0; \quad P_{23}^{(4)} \geq P_{21}P_{11}P_{12}P_{23} > 0$

De nuevo, $P_{ij}^{(4)} > 0, \quad \forall i,j \in S$

iii. El caso $P_{33} > 0$ es idéntico al ***ii***, sin más que intercambiar los papeles de los estados 1 y 3.

Así pues, existe una potencia de P (n=4) tal que todos sus elementos son estrictamente positivos y, por tanto, $\{X_t, t \in T\}$ es una cadena regular.

Ahora bien, las cadenas finitas homogéneas de Markov regulares son siempre ergódicas, siendo la distribución estacionaria $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, la única solución del sistema de ecuaciones:

$$\Pi P = \Pi$$

$$\sum_{i \in S} \pi_i = 1$$

Que en este caso queda:

$$\pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} = \pi_1$$

$$\pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} + \pi_3 P_{32} = \pi_2$$

$$\pi_2 P_{23} + \pi_3 P_{33} = \pi_3$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

Cuya solución resulta ser la del enunciado:

$$\pi_1 = \frac{P_{21}(1-P_{33})}{P_{21}(1-P_{33})+(1-P_{11})(1-P_{33})+P_{23}(1-P_{11})}$$

$$\pi_2 = \frac{(1-P_{11})(1-P_{33})}{P_{21}(1-P_{33})+(1-P_{11})(1-P_{33})+P_{23}(1-P_{11})}$$

$$\pi_3 = \frac{P_{23}(1-P_{11})}{P_{21}(1-P_{33})+(1-P_{11})(1-P_{33})+P_{23}(1-P_{11})}$$

□

En el caso español contemplado, las matrices de transición obtenidas de los subpaneles se muestran en los Cuadros 2 y 3 siguientes.

Cuadro 2: Matriz de Transición 2006-2007

		2007		
		Pobres Crónicos	Pobres Transitorios	No Pobres
	Pobres Crónicos	0.326	0.674	0.00 %
2006	Pobres Transitorios	0.0237	0.7994	0.1769
	No Pobres	0.00	0.2854	0.7146

Elaboración propia utilizando la ECV

Cuadro 3: Matriz de Transición 2007-2008

		2008		
		Pobres Crónicos	Pobres Transitorios	No Pobres
	Pobres Crónicos	0.2957	0.7043	0.00
2007	Pobres Transitorios	0.0283	0.7997	0.1720
	No Pobres	0.00	0.2812	0.7188

Elaboración propia utilizando la ECV

Ahora bien, si suponemos que la cadena es markoviana, se va a determinar si la muestra procede de una cadena de Markov homogénea con probabilidades de transición de un paso pre-asignadas (P^0_{ij}) para lo cual se efectuó el contraste de hipótesis:

$$H_0 : P_{ij} = P^0_{ij}, \forall i, j \in S$$

$$H_1 : \exists i, j \in S : P_{ij} \neq P^0_{ij}$$

Una vez aplicado el estadistico y como $H_0 : P_{ij} = P^0_{ij}$, sabiendo que P_{ij} es la matriz 2006-2007 y 2007-2008 y P^0_{ij} es la matriz obtenida como el promedio de ambas. Para $\alpha = 0.01$, se acepta la hipótesis nula, resultando que la matriz de transición para los periodos 2006-2007 y 2007-2008 está definida por la matriz promedio que se presenta en el cuadro (4):

Cuadro 4: Matriz de transición constante para 2006-2007 y 2007-2008

	Pobres Crónicos	Pobres Transitorios	No Pobres
Pobres Crónicos	0.31	0.69	0.00
Pobres Transitorios	0.03	0.80	0.17
No Pobres	0.00	0.28	0.72

Elaboración propia utilizando la ECV

Aplicando el Teorema 3.1, se obtiene que la matriz de transición límite es:

Cuadro 5: Matriz de transición estacionaria

	Pobres Crónicos	Pobres Transitorios	No Pobres
Pobres Crónicos	0.0263	0.6058	0.3678
Pobres Transitorios	0.0263	0.6058	0.3678
No Pobres	0.0263	0.6058	0.3678

Elaboración propia utilizando la ECV

Ya que el vector estacionario resulta ser:

$$\pi = (0.0263; 0.6058; 0.3678) \tag{7}$$

Por lo tanto, a largo plazo, el 2.63 % de los hogares serán pobres crónicos, quedando el 60.58 % en pobreza transitoria. Hasta este momento, se supuso que la cadena usada como modelo era markovianas de orden 1, sin embargo, en la práctica, es posible que no se cumpla este supuesto. Por esta razón, se comprobará, a través de la ecuación de Chapman-Kolmogorov la pertinencia de la hipótesis markoviana.

Así pues, se compara la matriz de transición de 2006-2008 (Cuadro 6) con la matriz obtenida de multiplicar la matriz de transición 2006-2007 (Cuadro 2) con la matriz 2007-2008 (Cuadro 3) que se muestran en el Cuadro 7.

Cuadro 6: Matriz de transición obtenida 2006-2008

		2008		
		Pobres Crónicos	Pobres Transitorios	No Pobres
	Pobres Crónicos	0.0702	0.9298	0.00
2006	Pobres Transitorios	0.0373	0.6623	0.3004
	No Pobres	0.00	0.4811	0.5189

Fuente: Elaboración propia

Cuadro 7: Matriz de Transición teórica 2006-2008

		2008		
		Pobres Crónicos	Pobres Transitorios	No Pobres
	Pobres Crónicos	0.1155	0.7686	0.1159
2006	Pobres Transitorios	0.0296	0.7057	0.2647
	No Pobres	0.0081	0.4291	0.5628

Fuente: Elaboración propia

Los datos muestran que no se cumple la ecuación de Chapman-Kolmogorov. Además, la aplicación del contraste de hipótesis de igualdad de matrices confirma esta afirmación, rechazando la igualdad entre las matrices de los Cuadros 6 y 7. Por lo tanto, debe rechazarse la suposición del carácter markoviano.

4. Relajación de los supuestos del modelo básico

Debido al resultado anterior, que muestra evidencia de que la cadena no es markoviana, es necesario relajar alguno de los supuestos para encontrar una solución satisfactoria al problema. La solución planteada en este articulo consiste en relajar el tiempo.

4.1. Matrices de Inercia

Una forma de tener en cuenta el tiempo en la formulación de las cadenas de Markov, consiste en utilizar el concepto de "inercia acumulativa". El modelo de McGinnis (1968) planteaba que, en los modelos Markovianos, se presenta el problema de *"lumping on the diagonals"*, según la cual el valor de la diagonal observada era mayor que la predicha por el modelo, es decir, que los valores eran subestimados porque no se tenía en cuenta la duración en los estados de aquellos individuos que no transitaban. De manera que la solución para estudiar la movilidad era darle al tiempo un rol más activo que en los otros modelos. Esta idea se implementó para desarrollar el modelo denominado *Cornell Mobility Model*[16].

El modelo de Cornell adiciona un axioma, el de inercia, sobre los movimientos dentro del tiempo en el espacio social:

> *Axiom of Cumulative Inertia. The probability of remaining in any state of nature increases as a strict monotone function of duration of prior residence in that state (McGinnis 1968)*

Es decir, lo que el axioma de la inercia acumulada postula es que la probabilidad de permanecer en cualquier estado se incrementa como una función estrictamente monótona de la duración anterior ese estado. De esta manera, no todos los individuos se rigen por la misma ley de movilidad[17] y aquellos que han permanecido, en un estado, un periodo de tiempo largo tienen una probabilidad mayor de permanecer en ese mismo estado respecto a los nuevos individuos que han llegado a ese estado.

En este modelo, cada estado $i \in S$ puede ser particionado según la duración que ha permanecido en ese estado, dando como resultado un conjunto de dobles particiones (por estado y duración) S_D. Por lo tanto, la estructura de la matriz de transición que incluye la duración, refleja el comportamiento en el periodo t de los elementos que en el momento $t-1$ han estado en esos estados previamente D periodos consecutivos de tiempo[18].

En nuestro caso, expandir la matriz no representó ningún cambio en la matriz de probabilidades de transición, debido a esto, una solución que se plantea es tener en cuenta la duración en el propio estado, es decir, considerar todas las situaciones que describen el historial de pobreza de los hogares entre los subpaneles, en lugar de hacerlo anualmente ya que ésta es ahora la unidad de análisis.

Con estas consideraciones, se obtiene la matriz de duraciones que se presenta en el Cuadro 8.

[16] Se puede encontrar una aplicación empírica en Myers, McGinnis, y Masnick (1967).
[17] En este caso, se relaja el supuesto de homogeneidad de la población y la dependencia markoviana.
[18] En Bartholomew (1973) se puede ver la matriz expandida, que desarrolla esta idea, con carácter general.

Cuadro 8: Duraciones en pobreza para la matriz 2006-2007

		2007							
		NP	Tr-05	Tr-06	Tr-07	Tr- 06y06	Tr-05y07	Tr-06y07	PC
	NP	2	0	0	1	0	0	0	0
	Tr-04	2	0	0	1	0	0	0	0
	Tr-05	0	2	0	0	0	1	0	0
2006	Tr-06	0	0	1	0	0	0	2	0
	Tr-04y05	0	2	0	0	0	1	0	0
	Tr-04y06	0	0	1	0	0	0	2	0
	Tr-05y06	0	0	0	0	1	0	0	1
	PC	0	0	0	0	1	0	0	2

Fuente: Elaboración propia

El valor esperado de las nuevas duraciones en pobreza queda definido en el Cuadro 9

Cuadro 9: Valor esperado de las nuevas duraciones en pobreza ($\overline{\mu}_{ij}$)

		2007		
		Pobres Crónicos	Pobres Transitorios	No Pobres
	Pobres Crónicos	2	0.167	0
2006	Pobres Transitorios	0.167	0.389	0.333
	No Pobres	0	0.167	2

Fuente:Elaboración propia

Utilizar estas nuevas duraciones da como resultado una nueva matriz de probabilidades de transición (cuadro 10).

Cuadro 10: Matriz de transición para 2006-2007 incluyendo las nuevas duraciones

		2007		
		Pobres Crónicos	Pobres Transitorios	No Pobres
	Pobres Crónicos	0.492	0.508	0
2006	Pobres Transitorios	0.016	0.750	0.234
	No Pobres	0	0.166	0.834

La matriz de probabilidad resultante de esta nueva propuesta muestra resultados completamente diferentes a la matriz original. Lo primero que puede observarse es que, para el caso de los pobres crónicos, las probabilidades son muy cercanas al 50 %. En este caso, la pobreza crónica en 2006-2007 paso del 31 % al 49 % reflejando que la duración en este estado tiene una ponderación mayor ($D = 2$), de manera que permanecer en el mismo estado sí haría que la persistencia fuera mayor, apoyando el supuesto de la inercia acumulativa de McGinnis.

Los resultados para los hogares pobres transitorios también se modifican y, dado que el único valor que aumentó fue el de no pobreza, podría estar reflejando que diferenciar entre los transitorios hacia la pobreza y transitorios hacia la no pobreza tiene efecto cuando se tienen en cuenta las duraciones entre las transiciones.

Finalmente, con los hogares no pobres ocurre de manera similar que con los pobres crónicos, donde la ponderación para tener en cuenta la duración de permanencia en el estado hace que el peso sea mayor en dicho estado.

En cuanto a las diagonales de las matrices, cuando se incluye la inercia frente a aquella en que no lo hace, se ve que, para el caso de la cadena de Markov de un solo paso, los valores son menores que cuando se considera la permanencia en dicho estado, confirmando el supuesto de inercia propuesto por McGinnis.

Aunque con ésta propuesta sea posible estudiar el efecto de la inercia en la duración de los estados, se puede ampliar un poco más y hacer una separación de los pobres transitorios tanto en situación de pobreza (cuando en último año del subpanel, el hogar fue pobre) como en situación de no pobreza (cuando el último año del trienio fue no pobre) y comparar los resultados.

En este caso, la nueva matriz expandida se muestra en el Cuadro 11

Cuadro 11: Matriz Expandida en 2006-2007, aplicando los tipos de transitoriedad

			2007							
			Pobres Crónicos		Transitorios Pobreza		Transitorio No Pobreza		No Pobres	
			1	2	1	2	1	2	1	2
2006	Pobres Crónicos	1	0	0.492	0	0	0	0.508	0	0
		2	0	0	0	0	0	0	0	0
	Transitorios Pobreza	1	0	0.046	0	0.445	0	0.509	0	0
		2	0	0	0	0	0	0	0	0
	Transitorios No Pobreza	1	0	0	0	0.161	0	0.484	0	0.355
		2	0	0	0	0	0	0	0	0
	No Pobres	1	0	0	0	0.166	0	0	0	0.834
		2	0	0	0	0	0	0	0	0

Fuente: Elaboración propia

Cuando se aplicó la primera definición de inercia no hubo ningún cambio, pero en este caso, la diferencia es que ahora los pobres transitorios se encuentran divididos entre pobres y no pobres pero se mantiene el comportamiento de la matriz inicial. Ahora, la matriz de probabilidades de transición queda definida como muestra el Cuadro 12

Cuadro 12: Matriz de transición 2006-2007, ampliando la transitoriedad con las nuevas duraciones

		2007			
		Pobres Crónicos	Transitorios Pobreza	Transitorio No Pobreza	No Pobres
2006	Pobres Crónicos	0.492	0	0.508	0
	Transitorios Pobreza	0.046	0.445	0.509	0
	Transitorios No Pobreza	0	0.161	0.484	0.355
	No Pobres	0	0.166	0	0.834

Fuente: Elaboración propia

En este caso, al separar los pobres transitorios, encontramos que los pobres crónicos en 2006 transitan hacia los pobres transitorios en situación de no pobreza mientras que los no pobres lo hacen al contrario, es decir, en el 2007 son transitorios hacia la situación de pobreza. Por otro lado, los resultados para los pobres transitorios de 2006 muestran que los transitorios en situación de pobreza pueden ir a todos los estados menos al de no pobreza, mientras que los transitorios en situación de no pobreza pueden acceder todos los estados menos al de la pobreza crónica como podría esperarse.

Para el caso de los pobres transitorios, las transiciones al siguiente periodo pueden tomar cualquier estado entre crónico, transitorio (pobreza y no pobreza) y no pobre.

Desde un principio, las matrices de transición 2006-2007 y 2007-2008 eran muy similares razón por la cual se ha mantenido la hipótesis de homogeneidad aunque se relaje la dependencia markoviana. En este articulo se relajó el supuesto de que el tiempo de permanencia en los estados en las cadenas de Markov era exponencial y se consideró que se rige por una variable aleatoria continua. Para incluir la variación en las duraciones, se aplicó la matriz de inercia y una variación de esta última. En la tabla resumen se presentan las distribuciones a largo plazo, obtenidas con todos los modelos propuestos:

Cuadro 13: Tabla resumen

		Vector límite
	π_{PC}	0.0263
Inicial	π_{Tr}	0.6058
	π_{NP}	0.3678
	π_{PC}	0.0291
Inercia1	π_{Tr}	0.621
	π_{NP}	0.360
	π_{PC}	0.0120
Inercia2	π_{Tr}	0.133
	π_{NP}	0.855
	π_{PC}	0.009 1
4 Estados	π_{Tr_p}	0.18
	π_{Tr_np}	0.259
	π_{NP}	0.552

En esta tabla se presenta el resumen de los vectores estacionarios encontrado con cada uno de los métodos que se han utilizado. Se puede ver que en general un 3 % de la población es pobre crónica mientras que el 97 % restante se reparte entre los pobres transitorios y los no pobres.

Se puede ver que los resultados de aplicar el modelo de inercia 1 son muy similares a los de la matriz original, ya que en este caso las duraciones sólo ponderan por 1 periodo como ya se ha comentado. Sin embargo, que cuando se tiene en cuenta la nueva ponderación (las ponderaciones propuestas cuyos resultados se encuentran en inercia 2), se encuentra que casi el 2 % de la población es pobre crónica y este resultado coincide con el esperado.

Finalmente, se puede observar que separar los pobres transitorios nos afecta considerablemente los resultados y además los valores de la diagonal de las matrices de transición son elevados, razón por la cual se puede intuir que hay diferentes subgrupos en la población.

5. Conclusiones

En este articulo, se estudió la dinámica de la pobreza utilizando la metodología de las cadenas de Markov. Primero se presentó como metodología básica las cadenas que se aplicaría a la base de datos elegida, la *ECV*, así como una solución a la relajación de los supuestos markovianos, ya que en la aplicación empírica, se incumple dicho comportamiento.

Primero proponemos utilizar una base de datos de panel rotante de tres años, utilizando la definición de Foster (2007) de pobre crónico. Elegimos esta definición porque incluye dos líneas: por un lado, la de pobreza que es relativa y corresponde al 60 % de la renta mediana y, en segundo lugar, la duración en dicho estado. Adicionalmente, satisface los requerimientos de los axiomas exigidos a los indicadores. En nuestro caso, la definición de pobre crónico corresponde a 3 años en pobreza. Pese a que el resultado de las matrices de transición es similar, se confirma que las matrices no son markovianas de orden 1 pero sí son homogéneas en el tiempo e iguales a la matriz promedio (cuadro 4) según se confirmó con el test respectivo, y que el comportamiento a largo plazo define que $\pi_{PC} = 2.63\,\%$, $\pi_{Tr} = 60.58\,\%$ y $\pi_{NP} = 36.78\,\%$.

Como se señaló cuando se presentó la metodología, la forma, elegida en este articulo, para modificar las duraciones en los estados, fue adaptar el modelo de Inercia acumulativa de McGinnis (1968). Con este modelo se buscaba implementar el hecho de que la probabilidad de permanecer en cualquier estado se incrementa como una función monótona de la duración del estado anterior. El resultado de esta metodología no presentó ningún cambio respecto a la matriz de probabilidades original, posiblemente debido a la definición de nuestros paneles de datos.

El resultado anterior hizo necesaria la modifición de la forma en la cual se están definiendo las duraciones, con el fin de captar el efecto de la inercia dentro de las matrices de transición. Con este cambio propuesto, los periodos pueden tomar duraciones de 1 o 2 según sea su estado. El valor de 1 se deben a que hay transición de estado entre los distintos periodos y 2 cuando no hay cambio de estado. Los resultados de aplicar esta definición de duraciones permite obtener otra matriz de probabilidades de transición (cuadro 10) que muestra que modificar el peso ponderado de las transiciones da mayor ponderación a las diagonales de la matriz, dándole por tanto importancia a no cambiar de estado.

Debido al resultado anterior, el siguiente paso fue ampliar la definición de los estados, ya que se puede contratar una concentración en el estados de los transitorios. Por esta razón se dividen los hogares transitorios en dos estados, por un lado los transitorios hacia la pobreza y, por otro, en transitorios hacia la no pobreza. Para ver si basta con ampliar los estados para ver el efecto de las duraciones, se aplica el concepto de inercia acumulativa y se expande la matriz (utilizando la primera definición de duraciones) y el resultado es que no hay ningún cambio respecto a la matriz de transiciones cuando no se tiene en cuenta la duración. Estos resultados muestran que, tener en cuenta el estado de pobreza transitoria tiene efectos sobre los resultados. De manera que suponemos que los estados dependen del tipo de hogar (si son *movers* o *stayers*) en realción con la presencia o ausencia de transiciones entre estados

En general, se puede decir que teniendo la *ECV* y luego de haber estudiado el comportamiento de los estados de pobreza, no pobreza y pobres transitorios, se sabe que no tienen un comportamiento de cadenas de Markov y que es necesario relajar sus supuestos. En este articulo, se planteó la utilización de un panel rotante compuesto por 3 años donde las matrices de transición fueron homogéneas pero no exhibían la dependencia markoviana de orden 1; la forma de relajar el supuesto markoviano fue a través de las matrices de inercia acumulada y se propueso una medición alternativa de las duraciones para captar el efecto del tiempo, llegando incluso a cuatro estados.

Referencias

Aaberge, R. y M. Mogstad. 2007. On the Definition and Measurement of Chronic Poverty. *Discussion Paper Series*. IZA DP No. 2659.

Arranz, J.M. y O. Cantó. 2008. "Measuring the effect of spell recurrence on poverty dynamics." *Documentos de trabajo P.T.N. 5/08*, Instituto de Estudios Fiscales.

Bahamon, M.M. 2010. *Dimensiones de la pobreza mediante curvas globales y transiciones. Análisis de los casos colombiano y español*. Tesis Doctoral. Universidad de Alcalá.

Bane, M.J. y D. Ellwood. 1986. "Slipping into and out of Poverty: The Dynamics of Spells." *Journal of Human Resources* 21 (1): 1–23.

Bartholomew, D. 1973. *Stochastic Models for Social Processes*. 2ª ed. John Wiley and Sons.

Baulch, B. y E. Masset. 2003. "Do Monetary and Nomonetary Indicators Tell the Same Story About Chronic Poverty? A Study of Vietnam in the 1990s." *World Development* 31 (3): 441–453.

Biewen, M. 2006. "Who are the chronic poor? An econometric analysis of chronic poverty in Germany." *Research on Economic Inequality* 13:31–62.

Bárcena, E., A. Fernández, B. Lacomba y G. Martín. 2006. "El efecto del tiempo en las probabilidades de transición entre distintos estados de la distribución de la renta." *XIII Encuentro de Economía Pública*. Almería.

Cantó, O. 1995. "Poverty Dynamics in Spain: A Study of Transitions in the 90´s." *X Annual Congress of the AIEL*. Bologna.

Cantó, O., C. Gradín y C. Del Rio. 2008. "La Dinámica de la Pobreza en España: Cronicidad, Transitoriedad y Recurrencia." *Documentos de trabajo*, FOESSA.

Chronic Poverty Research Center. CPRC. `http://www.chronicpoverty.org/research-themes-concepts`.

Dennis, I. y A.C. Guio. 2003. "Poverty and social exclusion in the EU after Laeken-part1." *Statistics in Focus. Population and Social Conditions*. Theme 3-8/2003.

Domínguez, J. 2003. *Análisis Dinámico de la Pobreza y la Estructura de los Hogares*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

Foster, J. 2007. A Class of Chronic Poverty Measures. *Working Paper* No. 07-W01. Department of Economics. Vanderbilt University.

Foster, J. y M.E. Santos. 2006. "Measuring Chronic Poverty." 11 Annual Meeting of the Altina American and Caribbean Economic Association- LACEA.Noviembre 2-4.

———. 2009. "Measuring Chronic Poverty." Inaugural Conference of the Courant Research Centre. *Poverty, Equity and Growth in Developing Countries*.

Hierro, M. y M. Guijarro. 2007. "Una revisión de la aplicación de las cadenas de Markov discretas al estudio de la movilidad geográfica." *Estadística Española* 49 (166): 473–499.

Hulme, D., K. Moore y A. Shepherd. 2001. Chronic Poverty: meanings and analytical frameworks. *CPRC Working Paper 2*.

Hulme, D. y A. Shepherd. 2003. "Conceptualizing Chronic Poverty." *World Development* 31 (3): 403–423.

INE. 2005. *Encuesta de Condiciones de Vida: Metodología*. Instituto Nacional de Estadística.

Jalan, J. y M. Ravallion. 1998. "Transient Poverty in Postreform Rural China." *Journal of Comparative Economics* 26:338–357.

———. 2000. "Is Transient Poverty Different? Evidence for Rural China." *Journal of Development Studies* 36 (6): 82–99.

Mateos-Aparicio, G. 1995. *Métodos estadísticos para actuarios*. Editorial Complutense.

McGinnis, R. 1968. "A Stochastic Model of Social Mobility." *American Sociological Review* 33 (5): 712–721.

Myers, G., R. McGinnis y G. Masnick. 1967. "The Duration of Residence Approach to a Dynamic Stochastic Model of Internal Migration: A Test of the Axiom of Cumulative Inertia." *Eugenics Quarterly* 14:121–126.

Núñez, J.J. 2010. *Estadística Actuarial III*. Difusión Restringida: Material de Clase. Universidad de Alcalá de Henares.

Shepherd, A. 2007. Understanding and explaining chronic poverty. *CPRC, Working Paper 80*.

Shorrocks, A. 1976. "Mobility and the Markov Assumption." *The Economic Journal* 86:566–578.

Stevens, A.F. 1994. "The Dynamics of Poverty Spells: Updating Bane and Ellwood." *The American Economic Review* 84 (2. Papers and Proceedings of the Hundred and Sixth Annual Meeting of the American Economic Association): 34–37.

———. 1995. "Climbing Out of Poverty, Falling Back In: Measuring the Persistence of Poverty Over Multiple Spells." *Working paper 5390*, National Bureau of Economic Research (NBER).

———. 1999. "Climbing Out of Poverty, Falling Back In: Measuring the Persistence of Poverty Over Multiple Spells." *Journal of Human Resources* 34 (3): 557–588.

Vélez, R. 1991. *Procesos Estocásticos*. Volumen Unidad Didáctica 1. UNED.

Whelan, C. y B. Maître. 2007. The Dynamics of Economic Vulnerability: A Comparative European Analysis. *Working Paper No. 202*. ESRI.

Yaqub, S. 2002. Chronic poverty:scrutinizing estimates, patterns, correlates, and explantions. *Working Paper 21*. Chronic Poverty Research Group.

———. 2003. Relating Severe Poverty and Chronic Poverty. *Document de Treball 03.07*. Facultat de Ciències Econòmiques i Empresarials. Universitat Autònoma de Barcelona.