“¿Es la velocidad de convergencia estable? Una aplicación a la convergencia en renta entre países de Europa del Este”

Autores

María Isabel González Martínez
Universidad de Murcia
Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía
Facultad de Economía y Empresa
Campus de Espinardo, s/n, 30100, Espinardo, Murcia
Teléfono: 968363751, Fax: 968367905
E-mail: maribel@um.es

Juan Cristóbal Campoy Miñarro
Universidad de Murcia
Departamento de Fundamentos del Análisis Económico
Facultad de Economía y Empresa
Campus de Espinardo, s/n, 30100, Espinardo, Murcia
Teléfono: 968363822, Fax: 968363758
E-mail: juancris@um.es

1. Introducción

El modelo de crecimiento neoclásico (Solow, 1956 y Swan, 1956) predice que la renta per cápita de las economías converge hacia la renta per cápita de su estado estacionario, y que la velocidad de convergencia disminuye a lo largo de la transición hacia el estado estacionario. Sin embargo, hasta la fecha, los estudios empíricos sobre convergencia fundamentados en el modelo de Solow-Swan se han centrado en contrastar la hipótesis de convergencia suponiendo una velocidad de convergencia constante, e igual a la del estado estacionario. La razón es que basan sus contrastes en la estimación de la ecuación obtenida a partir de la log-linealización alrededor del estado estacionario, de la ecuación de transición derivada del modelo neoclásico. Desde la perspectiva de este modelo, el análisis aplicado en tales estudios para contrastar convergencia sería adecuado, sólo si las economías están muy próximas a su estado estacionario. En cambio, si las economías se encuentran alejadas del estado estacionario el análisis no es correcto, porque no considera la dinámica de la velocidad de convergencia a lo largo de la transición hacia el estado estacionario.

En este trabajo proponemos y aplicamos un enfoque novedoso para contrastar la hipótesis de convergencia derivada del modelo neoclásico. Utilizando un enfoque de series temporales, proponemos un contraste de convergencia que, a diferencia de los estudios anteriores, permite que el coeficiente que representa la velocidad de convergencia evolucione según lo postulado en el modelo neoclásico. En primer lugar, mostramos que el comportamiento que predice este modelo puede ser modelizado mediante un modelo de corrección del error no lineal, donde la velocidad de ajuste hacia el equilibrio de largo plazo depende de la distancia entre la renta per cápita de una economía y la de su estado estacionario. En segundo lugar, mostramos la conveniencia de aplicar contrastes de raíz unitaria que consideran un ajuste no lineal al equilibrio de largo plazo para contrastar convergencia. Estos contrastes tienen en cuenta que la velocidad de convergencia dismuye a lo largo de la transición hacia el estado estacionario, tal y como postula el modelo neoclásico. Por último, aplicamos el contraste de raíz unitaria no lineal propuesto en Kapetanios *et. al.* (2003) para estimar dicho modelo, y contrastar convergencia en renta entre algunos de los países de Europa del Este.

Merece la pena señalar que, a nuestro entender, este trabajo es el único en señalar la conveniencia de aplicar contrastes de raíz unitaria no lineal para examinar convergencia en renta en el marco del modelo neoclásico. Además, es el primero en aplicar el contraste de raíz unitaria no lineal propuesto en Kapetanios *et. al.* (2003) para contrastar convergencia entre las series de renta de diferentes países.

El trabajo se organiza del siguiente modo. En el apartado 2 mostramos que la hipótesis de convergencia en el modelo neoclásico viene representada mediante un modelo de corrección del error no lineal, y que el contraste de convergencia relevante es un contraste de raíz unitaria no lineal. En el apartado 3 describimos la metodología econométrica aplicada en este trabajo. En el apartado 4 presentamos los datos y los resultados de la aplicación empírica. Por último, en el apartado 5, resumimos las principales conclusiones.

2. Contrastes de convergencia en el marco del modelo de crecimiento neoclásico

El modelo de crecimiento neoclásico tiene implicaciones fuertes sobre la convergencia en renta per cápita entre distintas economías, por lo que la convergencia se ha asociado tradicionalmente con el cumplimiento de las hipótesis de este modelo[1]. Bajo tales hipótesis se deriva que el estado estacionario para cada economía es único, y estable (Apéndice A.1). Es decir, la renta per cápita de cada economía converge hacia el nivel de su propio estado estacionario. Una vez alcanzado el estado estacionario, si éste es el mismo para todas, entonces las diferencias en renta per cápita entre las economías desaparecen. En tales circunstancias, el modelo neoclásico predice convergencia entre niveles de renta per cápita.

Pero, ¿qué pasa si las economías no han alcanzado el estado estacionario?, ¿qué pasa si están por debajo del estado estacionario, como suele ocurrir en la realidad? El modelo neoclásico ofrece aspectos interesantes sobre la transición hacia el estado estacionario. Predice que durante la transición la tasa de crecimiento de las economías está directamente relacionada con la distancia que las separa del estado estacionario. Cuanto más por debajo esté una economía de su estado estacionario mayor será su tasa de crecimiento. A medida que se aproxima al estado estacionario la tasa de crecimiento de la renta per cápita disminuye hasta alcanzar la tasa de crecimiento del estado estacionario, que coincide con la del progreso técnico (Apéndice A.1).

Esto tiene importantes implicaciones sobre la velocidad de convergencia hacia el estado estacionario. Si definimos ésta como el cambio en la tasa de crecimiento cuando el capital aumenta en un 1%. Podemos demostrar que la velocidad de convergencia no es constante a lo largo de la

[1] Tales hipótesis se refieren a las propiedades de la función de producción neoclásica.

transición, sino que crece con la tasa de crecimiento del capital (Apéndice A.2). Esto implica que la velocidad de convergencia será mayor para las economías que están más por debajo de su estado estacionario. A media que una economía se aproxime a su estado estacionario, la velocidad de convergencia irá disminuyendo. En el límite, cuando la economía tiende a su estado estacionario, la velocidad de convergencia tiende a la del estado estacionario, que es constante.

Hasta la fecha, la mayoría de los estudios sobre convergencia basan sus contrastes en la ecuación obtenida a partir de la log-linealización alrededor del estado estacionario, de la ecuación de transición derivada del modelo neoclásico (Apéndice A.3),

$$\log(y_t) - \log(y_{t-1}) = g - \left(1 - e^{-\beta^*}\right)\left[\log(y_{t-1}) - \log\left(y_{t-1}^*\right)\right] + \varepsilon_t \qquad [1]$$

donde y es la renta per cápita de la economía, y^* es la renta per cápita en el estado estacionario, g es la tasa de crecimiento del progreso técnico, β^* es la velocidad de convergencia en el estado estacionario y ε es un proceso estocástico de media nula.

La ecuación [1] muestra que la tasa de crecimiento de la renta per cápita alrededor del estado estacionario se puede modelizar mediante un modelo de corrección del error lineal. Como, bajo los supuestos del modelo neoclásico, $\beta^* > 0$, la ecuación [1] implica que la renta per cápita converge al nivel del estado estacionario, o de largo plazo. La velocidad de ajuste al equilibrio de largo plazo viene dada por el coeficiente de ajuste, $\left(1 - e^{-\beta^*}\right)$.

Basándose en la ecuación [1], los estudios empíricos sobre convergencia con datos de serie temporal proponen las siguientes ecuaciones para contrastar si las series de renta de dos economías, i, j, convergen hacia el equilibrio de largo plazo como predice el modelo neoclásico (Apéndice A.4),

$$\Delta y_{j,t-1}^i = \lambda^* y_{j,t-1}^i + \sum_{l=1}^{p} \Delta y_{j,t-1}^i + \eta_t \qquad [2]$$

$$\Delta y_{j,t-1}^i = \alpha + \lambda^* y_{j,t-1}^i + \sum_{l=1}^{p} \Delta y_{j,t-1}^i + \eta_t \qquad [3]$$

donde p es el número de retardos necesarios para que η_t sea un ruido blanco, $\lambda^* = -\left(1 - e^{-\beta^*}\right)$, $y^i_{j,t-1} = \log\left(y_{i,t-1}\right) - \log\left(y_{j,t-1}\right)$, $\Delta y^i_{j,t-1} = y^i_{j,t} - y^i_{j,t-1} = \Delta \log\left(y_{i,t-1}\right) - \Delta \log\left(y_{j,t-1}\right)$, y_i es la renta per cápita de la economía i, e y_j es la renta per cápita de la economía j.

La ecuación [2] es la ecuación de Dickey Fuller Aumentada sin constante y sin tendencia. Esta es la ecuación relevante si suponemos que las economías i y j tienen un mismo estado estacionario. La ecuación [3] incluye un término constante que recoge la posibilidad de que las economías puedan tener estados estacionarios diferentes[2]. En ambos casos el contraste de convergencia es el contraste de raíz unitaria lineal de Dickey Fuller (1979, 1981). Este contraste considera bajo la hipótesis nula ausencia de convergencia, $\lambda^* = 0$, y bajo la alternativa convergencia, $\lambda^* < 0$. Si se rechaza la hipótesis nula implica que ambas economías convergen hacia su propio estado estacionario a una velocidad constante dada por β^*. Además, en el caso de la ecuación [2], donde el estado estacionario es el mismo para las dos economías, un rechazo de la hipótesis nula implica también que las series de renta de ambas economías convergen entre sí.

Las ecuaciones [2] y [3] derivan de una aproximación lineal alrededor del estado estacionario. Por esta razón, consideran la velocidad de convergencia, β^*, y el coeficiente de reversión a la media, λ^*, constantes. En estas circunstancias se pueden aplicar contrastes de raíz unitaria lineales para contrastar convergencia. El problema de esta metodología es que se basa en el supuesto de economías alrededor del estado estacionario, por lo que sólo es correcta si las economías están realmente próximas a su estado estacionario. Sin embargo, en la práctica no podemos conocer si esto es así, y hay razones importantes para pensar que las economías se pueden encontrar suficientemente alejadas de su estado estacionario. Si las economías no han alcanzado el estado estacionario, sino que se encuentran en la dinámica de transición hacia el mismo, según el modelo neoclásico, la velocidad de convergencia no es constante ni coincide con la del estado estacionario, por lo que la ecuación [1] no representa la dinámica de la renta per cápita para estas economías. Esta ecuación debería ser modificada para tener en cuenta que durante la transición hacia el estado estacionario, la velocidad de convergencia disminuye a medida que las economías se acercan al mismo. La ecuación [4] recoge este hecho,

[2] Esta ecuación sólo es correcta para el contraste de convergencia si suponemos que la diferencia entre las economías radica únicamente en la tasa de ahorro (Apéndice A.4).

$$\Delta \log(y_{t-1}) = g - \left(1 - e^{-\beta_t}\right)\left[\log(y_{t-1}) - \log(y^*_{t-1})\right] + \varepsilon_t \qquad [4]$$

donde β_t es la velocidad de convergencia. Esta velocidad de convergencia no es constante sino que, bajo los supuestos del modelo de Solow-Swan, depende de la desviación del equilibrio de largo plazo en el período anterior,

$$\beta_t = f\left(\log(y^*_{t-1}) - \log(y_{t-1})\right), \quad f' > 0 \qquad [5]$$

Las ecuaciones [4] y [5] muestran que un modelo de corrección del error no lineal, puede representar la dinámica de la tasa de crecimiento de la renta per cápita, postulada en el modelo de crecimiento neoclásico. Bajo los supuestos de este modelo $\beta_t > 0 \;\; \forall t$, y la ecuación [4] implica que la renta per cápita converge a la renta de largo plazo. La velocidad de ajuste al equilibrio de largo plazo viene dada por el coeficiente de ajuste, $\left(1 - e^{-\beta_t}\right)$. A diferencia de la ecuación [1] éste no es constante, sino que depende de la velocidad de convergencia, que será mayor cuanto mayor sea la distancia al estado estacionario.

A partir de la ecuación [4], podemos derivar la siguiente ecuación para contrastar si las series de renta de dos economías, i, j, con el mismo estado estacionario convergen hacia su equilibrio de largo plazo como predice el modelo neoclásico,

$$\Delta y^i_{j,t-1} = \lambda_t y^i_{j,t-1} + \sum_{l=1}^{p} \Delta y^i_{j,t-1} + \eta_t \qquad [6]$$

donde p es el número de retardos necesarios para que η_t sea un ruido blanco, λ_t es el coeficiente de reversión a la media. A diferencia de las ecuaciones [2] y [3] este coeficiente no es constante, sino que varía con la velocidad de convergencia de las economías. Ésta depende de lo alejadas del estado estacionario que se encuentre cada economía. Cuanto más alejadas estén, mayor será la velocidad de convergencia, β_t, de cada una de ellas y mayor será el coeficiente de reversión a la media, λ_t. A medida que ambas economías se acerquen al estado estacionario, β_t y λ_t diminuirán. En el límite, cuando ambas estén muy próximas al estado estacionario β_t, tenderá a β^*, y λ_t tenderá a λ^*. En la práctica no conocemos a qué distancia del estado estacionario se encuentra cada economía. Para modelizar λ_t y poder estimar la ecuación [6] suponemos que el diferencial de renta entre ambas economías es un buen indicador de la distancia al estado estacionario. Este es un supuesto muy razonable ya que cuando las economías están muy alejadas de su estado estacionario, como aún no se ha alcanzado la convergencia en renta entre ellas, el diferencial de renta entre ambas es elevado, y λ_t es elevado. A medida que las economías se aproximan al estado estacionario, como éste es el mismo para ambas, el diferencial de renta entre ellas se reduce, y λ_t disminuye. En el estado estacionario, las series de renta de ambas economías convergen entre sí, por lo que el diferencial entre ellas será muy pequeño, y λ_t alcanza su valor mínimo que es λ^*.

$$\lambda_t = f\left(\left|\log(y_{i,t-1}) - \log(y_{j,t-1})\right|\right) = f\left(\left|y^i_{j,t-1}\right|\right), \qquad f' > 0 \qquad [7]$$

Si, tal y como mantiene el modelo de Solow-Swan, la velocidad de convergencia no es constante, sino que depende de la distancia al estado estacionario la ecuación [6] es la relevante para llevar a cabo el contraste de convergencia. En este caso el contraste de convergencia es un contraste de raíz unitaria no lineal. Dada la especificación de la ecuación [6], y la dinámica de λ_t recogida en [7], el contraste de raíz unitaria no lineal propuesto en Kapetanios *et. al.* (2003) resulta adecuado para contrastar convergencia en el marco del modelo neoclásico. Un rechazo de la hipótesis nula arroja evidencia favorable al modelo de crecimiento neoclásico, implicando que las series de renta de ambos países convergen hacia su estado estacionario a una velocidad que depende directamente de la distancia al mismo. Como el estado estacionario es el mismo, este resultado también significa que los niveles de renta per cápita de ambos países convergen entre sí a una velocidad creciente con la distancia que los separa a ambos.

3. Contraste de raíz unitaria no lineal

Kapetanios *et al.* (2003) propone un procedimiento para contrastar la hipótesis nula de no estacionariedad contra la alternativa de que el proceso es no lineal pero globalmente estacionario. En concreto, considera bajo la alternativa un proceso autoregresivo de transición suave donde la transición viene gobernada por una función exponencial (modelo ESTAR):

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1}\left[1-\exp\left(-\theta y_{t-1}^2\right)\right] + \sum_{j=1}^{p} \rho_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t, \qquad t = 1,......,T \qquad [8]$$

donde $\varepsilon_t \approx iid(0,\sigma^2)$, y γ es un parámetro desconocido. y_t es un proceso estocástico de media cero[3]. Kapetanios *et al.* (2003) consideran la función de transición exponencial, donde suponen $\theta \geq 0$. Esta función se caracteriza por estar simétricamente distribuida alrededor del cero, y estar limitada entre cero y uno, $[1-\exp(0)] = 0,\ \lim_{x \to \pm\infty} [1-\exp(x)] = 1$

θ es el parámetro de transición del modelo. Si θ es positivo, efectivamente controla la velocidad de reversión al equilibrio. Si θ es igual a cero no habría reversión al equilibrio porque el proceso tendría una raíz unitaria. La ecuación [8] tiene sentido económico ya que predice que la velocidad de reversión al equilibrio varía inversamente con el tamaño de la distancia que la separa del mismo. Esto concuerda con el modelo de crecimiento neoclásico que postula que cuanto más alejada está la renta de un país de su estado estacionario, más fuerte es la tendencia a acercarse al mismo. En el contexto de este modelo implica que debemos tener $\gamma < 0$ para que el proceso sea globalmente estacionario. Bajo esa condición, el proceso tendría una dinámica estable cuando y_{t-1}^2 es grande, sin embargo, para valores de y_{t-1}^2 pequeños tendría una escasa reversión a la media. En la mitad del régimen el proceso tiene una raíz raíz unitaria. El contraste de raíz unitaria lineal de Dickey Fuller (1979, 1981) puede tener escasa potencia contra tales alternativas estacionarias no lineales, por lo que en este escenario es más conveniente aplicar el contraste de Kapetanios *et al.* (2003) diseñado para tener potencia contra tales procesos ESTAR.

El contraste de Kapetanios *et al.* (2003) se centra directamente sobre el parámetro θ, que es cero bajo la hipótesis nula y positivo bajo la alternativa. Bajo la hipótesis nula ($\theta = 0$) y_t es un proceso lineal con raíz unitaria. Bajo la alternativa ($\theta > 0$), y_t es un proceso no lineal pero globalmente estacionario, ya que $-2 < \gamma < 0$ (Kapetanios *et al.*, 2003). El problema es que no es posible contrastar directamente la hipótesis nula, ya que γ no está identificado bajo la nula (Davies, 1987). Para solucionar este problema Kapetanios *et al.* (2003) proponen reparametrizar la ecuación [8] basándose en la aproximación de Taylor de primer orden, y derivar un contraste basado en el

---

[3] Si la serie de interés tiene media distinta de cero y/o tendencia lineal, la serie relevante para el análisis es la resultante de restar dicha media o tendencia a la serie original (Kapetanios *et al.,* 2003).

estadístico t. La aproximación de Taylor de primer orden al modelo ESTAR bajo la hipótesis nula es:

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1}^3 + \sum_{j=1}^{p} \rho_j \Delta y_{t-j} + \eta_t \qquad [9]$$

donde p es el número de retardos necesarios para que η_t sea un ruido blanco. Kapetanios *et al.* (2003) sugieren el siguiente estadístico para contrastar la nula $\delta = 0$ contra la alternativa $\delta < 0$:

$$t_{NL} = \frac{\hat{\delta}}{\sigma(\hat{\delta})} \qquad [10]$$

donde $\hat{\delta}$ es el estimador de MCO de δ, $\sigma(\hat{\delta})$ es la desviación típica de $\hat{\delta}$. A diferencia de los contrastes de linealidad contra no linealidad para procesos estacionarios, el estadístico t_{NL} no se distribuye asintóticamente como una normal. Kapetanios *et al.* (2003) derivan la distribución asintótica del t_{NL} bajo la hipótesis nula, y calculan mediante simulaciones los valores críticos asintóticos del estadístico para tres posibles tipos de procesos: con media nula (caso 1), con media distinta de cero (caso 2), y con tendencia lineal (caso 3). El cuadro 1 muestra los valores críticos.

En la práctica p se desconoce y debe determinarse a priori. Nosotros utilizamos el procedimiento aplicado en Perron (1989) para determinar el valor de p. Comenzando con un valor máximo de p (p_{max}), escogemos el primer valor de p para el que el estadístico t de $\hat{\rho}_p$ sea mayor que 1,6 en valor absoluto, y el estadístico t de $\hat{\rho}_l$ para $l>p$ sea menor que 1,6[4].

Cuadro 1. Valores críticos asintóticos para el estadístico t_{NL} (Kapetanios *et. al.*, 2003)

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
1%	-2.82	-3.48	-3.93
5%	-2.22	-2.93	-3.40
10%	-1.92	-2.66	-3.13

4. Análisis de convergencia entre los países de Europa del Este

En este trabajo aplicamos el contraste de raíz unitaria no lineal de Kapetanios, *et. al.* (2003) para contrastar convergencia en renta entre cuatro de los países de Europa del Este: Bulgaria, Hungría, Polonia y Rumania[5]. Para todos estos países disponemos de series anuales de renta per cápita en paridad de poder de compra (PPP) desde el año 1950[6]. Las series de Hungría y Polonia se extienden hasta el año 2004, y las de Bulgaria y Rumania hasta el año 2003[7]. El gráfico 1 muestra las series de renta per cápita en PPP (en logaritmos) para estos países. Existen diferencias importantes entre todos ellos. Hungría es el país de mayor renta per cápita seguida de Polonia y Bulgaria. La renta per cápita de Rumania es considerablemente más baja que la de los otros países. Dado que el objetivo de este trabajo es examinar convergencia en renta, los datos relevantes para el análisis corresponden a los diferenciales de renta percápita (en logaritmos) entre cada par de países[8]. El gráfico 2 muestra la evolución de estos diferenciales. Se puede observar que los diferenciales con Rumania son considerablemente más elevados que entre el resto de países.

Gráfico 1. Renta per cápita

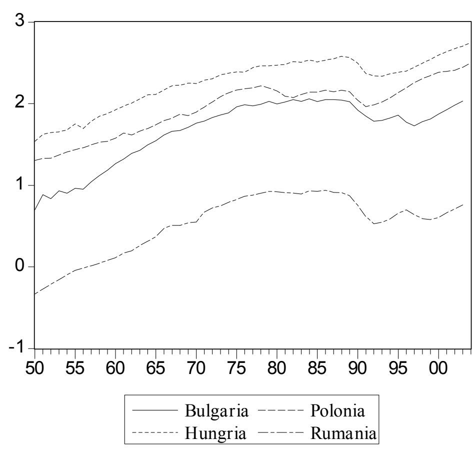
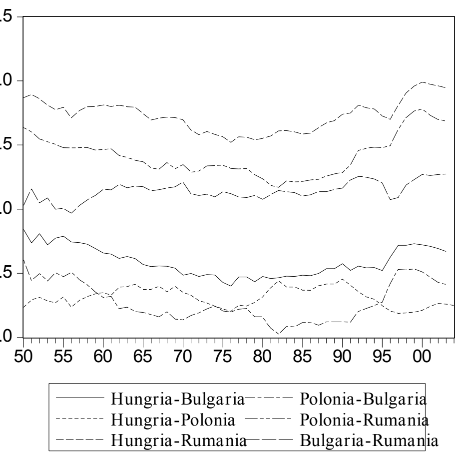


Gráfico 2. Diferenciales de renta per cápita



---

[4] Ng y Perron (1995) demuestran para modelos lineales univariantes que este método presenta ventajas importantes en términos de tamaño respecto a los procedimientos basados en criterios de información. En nuestro caso, bajo la nula de linealidad las propiedades del método de Perron (89) se mantienen.

[5] Nuestro deseo es extender este estudio al resto de países de Europa del Este, pero, por el momento, no disponemos de datos suficientes de estos países.

[6] Son series de renta per cápita en dólares de 2002 y expresadas en "EKS" PPP.

[7] Las series de datos provienen de "Groningen Growth and Development Centre and the Conference Board, Total Economy Database, Enero 2005, http://www.ggdc.net"

[8] Véanse las ecuaciones [2], [3] y [5] del apartado 2.

Para el análisis de convergencia en renta entre estos cuatro países las series relevantes son los diferenciales de renta per cápita entre cada par de países[9]. Como comentamos en el apartado 2, el análisis de convergencia entre dos economías se basa en aplicar contrastes de raíz unitaria sobre la serie del diferencial de renta per cápita (en logaritmos) entre ellas. Si se rechaza la hipótesis nula las rentas de esas dos economías están convergiendo.

En este trabajo aplicamos el contraste de raíz unitaria lineal de Dickey Fuller (1979, 1981) y el contraste de raíz unitaria no lineal de Kapetanios, *et. al.* (2003), a los diferenciales de renta per cápita entre cada par de países. Ambos son contrastes de convergencia, pero, según lo explicado en el apartado 2, realizan supuestos muy diferentes sobre la velocidad de convergencia hacia el equilibrio de largo plazo, por lo que los resultados de nuestro estudio deben ser interpretados del siguiente modo. Si ningún contraste rechaza la hipótesis nula no habría evidencia de convergencia. Si al menos un contraste rechaza habría evidencia de convergencia. Ahora bien, las implicaciones sobre la velocidad de convergencia dependen de qué contraste rechaza. Si es el contraste de raíz unitaria lineal el que rechaza podemos afirmar que la velocidad de convergencia durante el proceso de convergencia es constante. En cambio, si es el contraste de raíz unitaria no lineal el que rechaza habría evidencia de la velocidad de convergencia no es constante, sino que depende de la distancia al estado estacionario, como afirma el modelo neoclásico.

El cuadro 2 muestra diferencias importantes entre los resultados del contraste de Dickey Fuller Aumentado con y sin constante, t y t_{μ} respectivamente, y el contraste de Kapetanios, *et. al.* (2003), t_{NL} [10]. Éste último, rechaza la hipótesis nula para los diferenciales entre Bulgaria, Polonia y Hungría, indicando que estos países convergen hacia su estado estacionario a una velocidad que depende de la distancia al mismo. Como para la aplicación de este contraste se supone que estado estacionario es el mismo, los resultados también implican que podemos hablar de convergencia entre las rentas de Bulgaria, Polonia y Hungria. Por el contrario, los resultados de los contrastes de Dickey Fuller (1979, 1981) no muestran evidencia de convergencia, ya que no rechazan en ningún caso la hipótesis nula.

Estos resultados ponen de manifiesto dos cosas. Primera, que hay convergencia entre Bulgaria, Hungría y Polonia, pero que la velocidad de convergencia hacia el equilibrio de largo plazo no es

[9] Para que N economías converjan entre sí se requiere que haya convergencia entre cada par de economías.
[10] Dado que las series de los diferenciales de renta tienen media distinta de cero, para aplicar el contraste de Kapetanios, *et. al.* (2003) fue preciso trabajar con las series resultantes de restar la media a la serie original.

constante, por lo que es importante aplicar contrastes no lineales que tengan en cuenta esta hecho. Segunda, que las conclusiones de los contrastes de raíz unitaria lineales y no lineales pueden ser muy diferentes. Esas diferencias se deben a la baja potencia de los contrastes de raíz unitaria lineales contra alternativas no lineales (Kapetanios, *et. al.*, 2003). Si, tal y como predice el modelo neoclásico, la velocidad de convergencia no es constante, la reversión hacia el equilibrio de largo plazo no es constante, por lo que el contraste de de raíz unitaria lineal de Dickey Fuller (1979, 1981) no es válido y puede llevar a conclusiones erróneas[11].

Cuadro 2. Contrastes de raíz unitaria sobre los diferenciales de renta

	t	t_{μ}	t_{NL}
Hungria – Polonia	-0.36 (0)	-2.22 (2)	-2.91 (2)*
Hungria – Bulgaria	-0.98 (0)	-2.13 (0)	-3.63 (0)**
Hungria – Rumania	0.002 (1)	-1.39 (1)	-1.05 (1)
Polonia – Bulgaria	-1.06 (2)	-1.95 (2)	-2.70 (2)*
Polonia – Rumania	0.43 (5)	-1.07 (1)	-1.83 (5)
Bulgaria - Rumania	1.12 (4)	-2.53 (2)	-1.67 (0)

(**) denota que se rechaza la hipótesis nula al 10% (5%)
Los valores críticos de los estadísticos t y t_{μ} son los calculados en Mackinnon (1991), y los de t_{NL} son los calculados en Kapetanios *et. al.* (2003) para el caso 2. Entre paréntesis se muestra el número de retardos, *p*, incluidos en la ecuación del contraste para que las perturbaciones del modelo fuesen ruido blanco. Determinamos *p* utilizando el procedimiento de Perron (1989), con p_{max}=6.

5. Conclusiones

En este trabajo mostramos que los contrastes de raíz unitaria lineales, que tradicionalmente se han empleado para el análisis de convergencia, no son correctos. Estos contrastes no tienen en cuenta una de las implicaciones del modelo de crecimiento neoclásico: la velocidad de convergencia disminuye a medida que la renta se aproxima a la del estado estacionario. En estas circunstancias, su aplicación no permite contrastar la hipótesis de convergencia derivada del modelo neoclásico. Además, pueden llevar a conclusiones erróneas sobre la hipótesis de convergencia si la velocidad de convergencia no es constante durante la transición hacia el estado estacionario. Nosotros mostramos la conveniencia de aplicar contrastes de raíz unitaria no lineales para contrastar convergencia en el marco del modelo neoclásico. Estos contrastes permiten contrastar la hipótesis de convergencia

[11] Según el modelo neoclásico este contraste sólo sería válido para economías alrededor de su estado estacionario, donde la velocidad de convergencia se puede suponer constante.

teniendo en cuenta que la velocidad de convergencia no es constante, sino que depende directamente de la distancia al estado estacionario, tal y como se deriva del modelo neoclásico.

Por último, realizamos una aplicación empírica donde contrastamos convergencia en renta entre cuatro países de Europa del Este. Aplicamos contrastes de raíz unitaria lineal (Dickey Fuller) y no lineales (Kapetanios, *et. al.*, 2003). Los resultados de éste último indican convergencia entre tres de los cuatro países, mientras que el contraste de Dickey Fuller no encuentra evidencia de convergencia en ningún caso. Esta diferencia de resultados indica que la velocidad de convergencia entre estos países no es constante, y pone de manifiesto las deficiencias de los contrastes de raíz unitaria lineales para contrastar convergencia cuando la velocidad de convergencia depende de la distancia al estado estacionario.

Apéndice A

A.1. la ecuación fundamental del modelo de crecimiento neoclásico

Consideremos la siguiente función de producción neoclásica[12]:

$$Y_t = F(K_t, L_t \cdot A_t) \qquad [1.A]$$

donde Y es la producción, K el factor capital, L el factor trabajo y A el progreso tecnológico. Para que exista un estado estacionario la tecnología debe estar multiplicando al factor trabajo en la función de producción. A este producto, $\hat{L}_t = L_t A_t$, se le suele llamar unidades de eficiencia del trabajo (Sala-i-Martin, 2000). La producción medida en términos de unidades de eficiencia del trabajo es

$$\hat{y}_t = \frac{Y_t}{L_t \cdot A_t} = \frac{F(K_t, L_t \cdot A_t)}{L_t \cdot A_t} = F\left(\frac{K_t}{L_t \cdot A_t}, 1\right) = F(\hat{k}_t, 1) = f(\hat{k}_t) \qquad [2.A]$$

[12] Las funciones de producción neoclásicas son aquellas que satisfacen las siguientes propiedades: rendimientos constantes a escala, productividad marginal del capital y del trabajo es positiva, pero decreciente, y satisface las condiciones de Inada. Éstas exigen que la productividad marginal del capital (trabajo) se aproxime a cero cuando capital (trabajo) tiende a infinito, y que tienda a infinito cuando el capital (trabajo) se aproxima a cero.

donde $\hat{k}_t = \dfrac{K_t}{L_t \cdot A_t}$ es el capital por unidad de trabajo eficiente.

Si consideramos una economía cerrada, el producto final de la economía se distribuye entre consumo e inversión.

$$Y_t = C_t + I_t \tag{3.A}$$

Se supone que la tasa de ahorro es constante en el tiempo e igual a s. En una economía cerrada el ahorro y la inversión coinciden, por lo que el consumo y la inversión de esta economía vienen dados por las ecuaciones:

$$C_t = (1-s)Y_t \tag{4.A}$$

$$I_t = sY_t \tag{5.A}$$

La inversión total de una economía es igual al aumento neto del stock de capital, más la depreciación del capital existente. Si denotamos la inversión neta por $\dot{K}_t = \dfrac{dK_t}{dt}$, y la depreciación por D_t, tenemos:

$$I_t = \dot{K}_t + D_t \tag{6.A}$$

La depreciación en cada momento del tiempo será igual a la tasa de depreciación por el capital existente en ese momento. Si suponemos una tasa de depreciación constante e igual a δ, podemos escribir:

$$I_t = \dot{K}_t + \delta K_t \tag{7.A}$$

Sustituyendo términos en la ecuación [3.A], y reagrupando

$$\dot{K}_t = sY_t - \delta K_t = sF(K_t, L_t \cdot A_t) - \delta K_t \tag{8.A}$$

La ecuación [8.A] muestra cuál es el aumento del stock de capital en cada instante. En términos de unidades de eficiencia, el aumento del stock de capital en cada instante viene dado por la siguiente ecuación,

$$\frac{d\hat{k}_t}{dt} = \dot{\hat{k}} = \frac{d\left(K_t / L_t A_t\right)}{dt} = \frac{\dot{K}_t \cdot L_t \cdot A_t - K_t \cdot A_t \cdot \dot{L}_t - K_t \cdot L_t \cdot \dot{A}_t}{\left(L_t \cdot A_t\right)^2} = \frac{\dot{K}_t}{L_t \cdot A_t} - \hat{k}\frac{\dot{L}_t}{L_t} - \hat{k}\frac{\dot{A}_t}{A_t} \qquad [9.A]$$

Si suponemos que L_t crece a una tasa exógena constante que denotamos n, y que A_t crece también a una tasa exógena constante que denominamos g, la ecuación [9.A] se puede escribir del siguiente modo,

$$\dot{\hat{k}} = \frac{\dot{K}_t}{L_t \cdot A_t} - n\hat{k}_t - g\hat{k}_t \qquad [10.A]$$

De la ecuación [8.A] podemos derivar cuál es el primer término de esta ecuación[13]

$$\frac{\dot{K}_t}{L_t \cdot A_t} = \frac{sF\left(K_t, L_t \cdot A_t\right)}{L_t \cdot A_t} - \delta\frac{K_t}{A_t L_t} = sf\left(\hat{k}_t\right) - \delta\hat{k}_t \qquad [11.A]$$

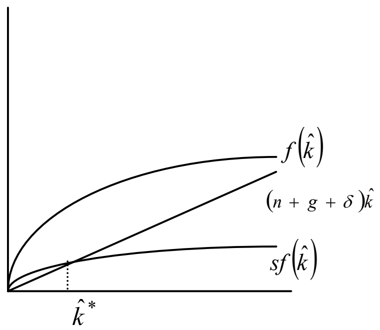
Sustituyendo ese término en la ecuación [10.A],

$$\dot{\hat{k}}_t = sf\left(\hat{k}_t\right) - \left(n + g + \delta\right)\hat{k}_t \qquad [12.A]$$

Esta es la ecuación fundamental del modelo de Solow-Swan. Describe la evolución del stock de capital por unidad eficiente a lo largo del tiempo. La ecuación [12.A] indica que el stock de capital por unidad eficiente aumenta a medida que aumenta la tasa de ahorro. Por el contrario, disminuye cuando aumentan el número de unidades eficientes o la tasa de depreciación.

Como la función de producción es neoclásica, $f\left(\hat{k}_t\right)$ es creciente y cóncava. Además, la pendiente de $f\left(\hat{k}_t\right)$ tiende a infinito cuando $\hat{k}_t$ se aproxima a cero, y tiende a cero cuando $\hat{k}_t$ se acerca a infinito. La función $sf\left(\hat{k}_t\right)$, llamada curva de ahorro, es proporcional a la función de producción, por lo que también es creciente, cóncava, vertical en el origen y asintóticamente horizontal. Dado que la tasa de ahorro es un número menor que uno, la función $sf(\hat{k}_t)$ es inferior a $f(\hat{k}_t)$. La pendiente de la función $(n+g+\delta)\hat{k}_t$, denominada en sentido amplio curva de depreciación, es constante ya que es una línea recta. En el gráfico 1.A se representan todas estas funciones.

Gráfico 1.A



El gráfico 1.A muestra que las funciones $sf(\hat{k}_t)$ y $(n+g+\delta)\hat{k}_t$, se cruzan en el origen (si $\hat{k}=0$ ambas funciones son iguales a cero). A partir de ese punto la pendiente de la curva de ahorro va decreciendo a medida que $\hat{k}$ aumenta, mientras que la pendiente de la curva de depreciación es constante. Esto implica que existirá un valor de capital, $\hat{k}^* \neq 0$, donde las curvas de ahorro y de depreciación necesariamente vuelvan a cruzarse. Pasado ese punto, dado que la pendiente de $sf(\hat{k}_t)$ sigue decreciendo y que $(n+g+\delta)\hat{k}_t$ es una línea recta, las dos curvas no vuelven a cruzarse más. Es decir, si ignoramos el origen, las curvas de ahorro y depreciación deben cruzarse una vez y solamente una.

El punto $\hat{k}^*$ donde las curvas se cruzan se llama estado estacionario. Si la economía se encuentra en ese punto la curva de depreciación es igual a la de ahorro, y la ecuación [12.A] indica que el stock de capital por unidad eficiente no varía, ($\dot{\hat{k}}_t = 0$). Es decir, si la economía se encuentra en $\hat{k}^*$se quedará en este punto para siempre. Al stock de capital con esa propiedad se le llama stock de capital de estado estacionario.

El gráfico1.A sirve también para ver que el estado estacionario es estable, dado que, tengamos el capital que tengamos, la dinámica del modelo nos hace gravitar hacia el estado estacionario. Esto es así porque a la izquierda de $\hat{k}^*$ la curva de ahorro es superior a la curva de depreciación. En esta

[13] Se aplica el supuesto de que la función de producción presenta rendimientos constantes a escala.

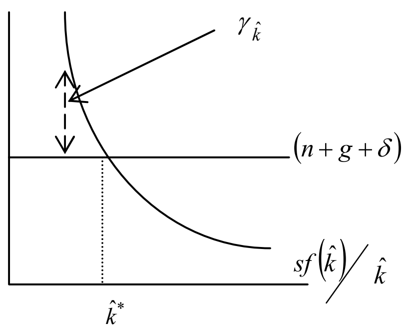
región la ecuación fundamental de Solow-Swan dice que $\dot{\hat{k}}_t > 0$ por lo que el capital aumenta. Lo contrario ocurre a la derecha de $\hat{k}^*$, donde la curva de ahorro es inferior a la de depreciación y $\dot{\hat{k}}_t < 0$. Resumiendo, el modelo neoclásico implica que el estado estacionario existe, es único y es estable.

La división de la ecuación fundamental de Solow-Swan por el stock de capital por unidad eficiente, da la tasa de crecimiento del capital,

$$\gamma_{\hat{k}_t} = \frac{\dot{\hat{k}}_t}{\hat{k}_t} = s\frac{f(\hat{k}_t)}{\hat{k}_t} - (n + g + \delta) \qquad [13.A]$$

Esta ecuación explica que la tasa instantánea de crecimiento del capital en términos efectivos será igual a la diferencia entre el ahorro por unidad de capital efectiva y la tasa de depreciación, entendida ésta en un sentido amplio. Obsérvese que ahora la curva de ahorro, $sf(\hat{k}_t)/\hat{k}_t$, es una función decreciente en $\hat{k}_t$. Tiende a infinito cuando $\hat{k}_t$ tiende a cero, y tiende a cero cuando $\hat{k}_t$ tiende a infinito[14]. La curva de depreciación es independiente de $\hat{k}_t$ y se representa por una línea horizontal. El gráfico 2.A representa ambas funciones.

Gráfico 2.A



El gráfico 2.A muestra que la tasa de crecimiento es positiva para valores de $\hat{k}_t$ inferiores a $\hat{k}^*$, y negativa para valores de $\hat{k}_t$ superiores a $\hat{k}^*$. Además la tasa de crecimiento es tanto mayor cuando más por debajo está la economía del estado estacionario. Disminuye al ir aproximándose la economía al estado estacionario. Cuando se alcanza el estado estacionario el crecimiento se detiene y la economía permanece en él para siempre. En ese punto la tasa de crecimiento de $\hat{k}$ es cero, $\gamma_{\hat{k}}^{*} = \dot{\hat{k}}^{*} / \hat{k}^{*} = 0$. Si el stock de capital por unidad eficiente es constante, el PIB por unidad eficiente, $\hat{y} = Y / LA$, también será constante ($\dot{\hat{y}}_t = 0$), por lo que su tasa de crecimiento también será igual a cero, $\gamma_{\hat{y}}^{*} = \dot{\hat{y}}^{*} / \hat{y}^{*} = 0$.

Si las variables en términos de unidades de eficiencia son constantes en el largo plazo, las variables en términos per cápita crecerán a largo plazo al mismo ritmo que el progreso tecnológico. Esto es así porque dado que $\left(\gamma_{k_t} = \gamma_{\hat{k}_t} + g\right)$ y $\left(\gamma_{y_t} = \gamma_{\hat{y}_t} + g\right)$[15], y que en el estado estacionario $\gamma_{\hat{k}}^{*} = \gamma_{\hat{y}}^{*} = 0$, entonces la tasa de crecimiento de las variables en términos per cápita vendrá explicada únicamente por el progreso tecnológico, $\gamma_{k}^{*} = \gamma_{y}^{*} = g$. El modelo de crecimiento neoclásico postula que a largo plazo la única fuente de crecimiento de una economía es el progreso tecnológico, que supone exógeno y constante. Ese es precisamente el gran problema del modelo neoclásico, al suponer que el progreso tecnológico es exógeno en el sentido de que no surge de la inversión en I+D de las empresas, ni del esfuerzo investigador de nadie, entonces este modelo de crecimiento no es capaz de explicar de dónde surge la fuente del crecimiento de largo plazo.

A.2. Transición hacia el estado estacionario

El modelo neoclásico implica que en el estado estacionario las economías crecen al mismo ritmo que el progreso tecnológico. Pero, ¿qué pasa si las economías no están en el estado estacionario?

---

[14] $s\frac{f(\hat{k}_t)}{\hat{k}_t} = s\frac{F(\hat{k}_t,1)}{\hat{k}_t} = sF\left(1, \frac{1}{\hat{k}_t}\right)$

[15] Derivación de la tasa de crecimiento del capital percápita:

$$
\begin{aligned}
& k_t = \hat{k}_t A_t \\
& \log k_t = \log \hat{k}_t + \log A_t \\
& \frac{d \log k_t}{dt} = \frac{d \log \hat{k}_t}{dt} + \frac{d \log A_t}{dt} \\
& \gamma_{k_t} = \gamma_{\hat{k}_t} + \gamma_A = \gamma_{\hat{k}_t} + g
\end{aligned}
$$

Del mismo modo obtenemos para la renta per cápita: $\gamma_{y_t} = \gamma_{\hat{y}_t} + \gamma_A = \gamma_{\hat{y}_t} + g$

Este modelo ofrece aspectos interesantes sobre la transición hacia el estado estacionario. Para descubrirlos comenzamos calculando la velocidad de convergencia, entendida como el cambio en la tasa de crecimiento cuando el capital aumenta en un 1%.

$$\beta_t = \frac{-\partial \gamma_{\hat{k}_t}}{\partial \log(\hat{k}_t)} \qquad [14.A]$$

Para calcular esa derivada es preciso expresar la tasa de crecimiento como función de $\log(\hat{k})$, dado que ahora la tenemos como función de $\hat{k}$. Sustituyendo en la ecuación [13.A],

$$\gamma_{\hat{k}_t} = s e^{\log f(\hat{k}_t) - \log(\hat{k}_t)} - (n + g + \delta) \qquad [15.A]$$

De la expresión [15.A] podemos derivar la velocidad de convergencia.

$$\begin{aligned}
\beta_t &= \frac{-\partial \gamma_{\hat{k}_t}}{\partial \log(\hat{k}_t)} = -s \frac{\partial e^{\log f(\hat{k}_t) - \log(\hat{k}_t)}}{\partial \log(\hat{k}_t)} = -s e^{\log f(\hat{k}_t) - \log(\hat{k}_t)} \frac{\partial(\log f(\hat{k}_t) - \log(\hat{k}_t))}{\partial \log(\hat{k}_t)} = \\
&= -s \frac{f(\hat{k}_t)}{\hat{k}_t}\left(\frac{\partial \log f(\hat{k}_t)}{\partial \log(\hat{k}_t)} - 1\right) = -s \frac{f(\hat{k}_t)}{\hat{k}_t}\left(\frac{\partial \log f(e^{\log(\hat{k}_t)})}{\partial \log(\hat{k}_t)} - 1\right) = \\
&= -s \frac{f(\hat{k}_t)}{\hat{k}_t}\left(\frac{\partial f(e^{\log(\hat{k}_t)})}{\partial \log(\hat{k}_t)} \frac{1}{f(\hat{k}_t)} - 1\right) = -s \frac{f(\hat{k}_t)}{\hat{k}_t}\left(\frac{\partial f(e^{\log(\hat{k}_t)})}{\partial e^{\log(\hat{k}_t)}} \frac{\partial e^{\log(\hat{k}_t)}}{\partial \log(\hat{k}_t)} \frac{1}{f(\hat{k}_t)} - 1\right) = \\
&= -s \frac{f(\hat{k}_t)}{\hat{k}_t}\left(\frac{\partial f(\hat{k}_t)}{\partial \hat{k}_t} \frac{e^{\log(\hat{k}_t)}}{f(\hat{k}_t)} - 1\right) = -s \frac{f(\hat{k}_t)}{\hat{k}_t}\left(\frac{PMg_K \hat{k}_t}{f(\hat{k}_t)} - 1\right)
\end{aligned} \qquad [16.A]$$

donde $PMg_{K_t} = \frac{\partial f(\hat{k}_t)}{\partial \hat{k}_t} = f'(\hat{k}_t)$[16], y el cociente $\frac{PMg_{K_t} \hat{k}_t}{f(\hat{k}_t)}$, al que denominamos α, es la participación del capital en el producto, que suponemos constante,

---

[16] $PMg_{K_t} = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \frac{\partial(A_t L_t f(\hat{k}_t))}{\partial K_t} = A_t L_t \frac{\partial f(\hat{k}_t)}{\partial \hat{k}_t} \frac{\partial \hat{k}_t}{\partial K_t} = A_t L_t f'(\hat{k}_t) \frac{1}{A_t L_t} = f'(\hat{k}_t)$

$$\alpha = \frac{PMg_{K_t}\hat{k}_t}{f(\hat{k}_t)} = \frac{PMg_{K_t}\, K_t/L_t A_t}{Y_t/L_t A_t} = \frac{PMg_{K_t} K_t}{Y_t} \qquad [17.A]$$

La velocidad de convergencia es:

$$\beta_t = -s\frac{f(\hat{k}_t)}{\hat{k}_t}(\alpha - 1) = -(\gamma_{\hat{k}_t} + (n + g + \delta))(\alpha - 1) = (\gamma_{\hat{k}_t} + (n + g + \delta))(1 - \alpha) \qquad [18.A]$$

La expresión [17.A] muestra que la velocidad de convergencia no es constante sino que crece con la tasa de crecimiento del capital. Como ésta es decreciente con el nivel de capital, la velocidad de convergencia decrecerá a medida que aumente el nivel de capital. Esto es, para niveles muy bajos de capital la velocidad de convergencia será muy elevada, y a medida que el capital se vaya incrementando la velocidad de convergencia irá disminuyendo. Esto implica que la velocidad de convergencia para economías por debajo del estado estacionario será mayor que en el estado estacionario. A media que la economía se aproxime a su valor de estado estacionario, la velocidad de convergencia irá disminuyendo. Por el contrario, cuando el capital se encuentre por encima de su nivel del estado estacionario la velocidad de convergencia será más pequeña que en el estado estacionario, y aumentará a medida que el capital se aproxime al estado estacionario. La velocidad de convergencia no llega a ser nunca negativa. En el límite, cuando el capital tiende a infinito la velocidad de convergencia tiende a cero.

En el estado estacionario, donde $\gamma^*_{\hat{k}_t} = 0$, la velocidad de convergencia es:

$$\beta^* = (1 - \alpha)(n + g + \delta) \qquad [19.A]$$

A.3. Dinámica de la renta alrededor del estado estacionario

Para estudiar la dinámica alrededor del estado estacionario reparametrizamos la ecuación [12.A] mediante un desarrollo de Taylor de primer orden alrededor del estado estacionario,

$$\dot{\hat{k}}_t = \dot{\hat{k}}^* + \left.\frac{\partial \dot{\hat{k}}_t}{\partial \hat{k}_t}\right]_{\hat{k}_t = \hat{k}^*} \left(\hat{k}_t - \hat{k}^*\right) = \left[sf'\left(\hat{k}_t\right) - \left(n + g + \delta\right)\right]_{\hat{k}_t = \hat{k}^*} \left(\hat{k}_t - \hat{k}^*\right) =$$
$$= \left[\frac{\left(n + g + \delta\right)\hat{k}^* f'\left(\hat{k}^*\right)}{f\left(\hat{k}^*\right)} - \left(n + g + \delta\right)\right]\left(\hat{k}_t - \hat{k}^*\right) \qquad [20.A]$$

Como hemos visto antes, $\frac{\hat{k}^* f'\left(\hat{k}^*\right)}{f\left(\hat{k}\right)} = \alpha$, y la ecuación se puede expresar del siguiente modo,

$$\dot{\hat{k}}_t = \left[\left(n + g + \delta\right)\alpha - \left(n + g + \delta\right)\right]\left(\hat{k}_t - \hat{k}^*\right) = \left(\alpha - 1\right)\left(n + g + \delta\right)\left(\hat{k}_t - \hat{k}^*\right) = -\beta^*\left(\hat{k}_t - \hat{k}^*\right) \qquad [21.A]$$

Esta ecuación muestra la dinámica del capital alrededor del estado estacionario.

Del mismo modo, en términos de renta[17],

$$\dot{\hat{y}}_t = -\beta^*\left(\hat{y}_t - \hat{y}^*\right) \qquad [22.A]$$

Si dividimos la ecuación [22.A] por la renta efectiva, obtenemos la dinámica de la tasa de crecimiento de la renta alrededor del estado estacionario,

$$\frac{\dot{\hat{y}}_t}{\hat{y}_t} = -\beta^*\left(\frac{\hat{y}_t - \hat{y}^*}{\hat{y}_t}\right) = \beta^*\left(\frac{\hat{y}^* - \hat{y}_t}{\hat{y}_t}\right) \qquad [23.A]$$

Si estamos cerca del estado estacionario, como es nuestro caso,

[17] Dado que $\hat{y}_t = f\left(\hat{k}_t\right)$, podemos expresar $\dot{\hat{y}}_t = \frac{d\hat{y}_t}{dt} = \frac{df\left(\hat{k}_t\right)}{dt} = \frac{\partial f\left(\hat{k}_t\right)}{\partial \hat{k}_t}\frac{\partial \hat{k}_t}{\partial t} = f'\left(\hat{k}_t\right)\dot{\hat{k}}_t$

Entonces, $\hat{y}_t - \hat{y}^* = f'\left(\hat{k}_t\right)\left(\hat{k}_t - \hat{k}^*\right)$

Despejando en la expresión anterior $f'\left(\hat{k}_t\right) = \frac{\hat{y}_t - \hat{y}^*}{\hat{k}_t - \hat{k}^*}$

Sustituyendo, $\dot{\hat{y}}_t = \frac{\hat{y}_t - \hat{y}^*}{\hat{k}_t - \hat{k}^*}\left[-\beta^*\left(\hat{k}_t - \hat{k}^*\right)\right] = -\beta^*\left(\hat{y}_t - \hat{y}^*\right)$

$$\left(\frac{\hat{y}^* - \hat{y}_t}{\hat{y}_t}\right) \approx \log\left[1 + \frac{\hat{y}^* - \hat{y}_t}{\hat{y}_t}\right] \qquad [24.A]$$

Sustituyendo en la ecuación [23.A],

$$\frac{\dot{\hat{y}}_t}{\hat{y}_t} = \beta^* \log\left[1 + \frac{\hat{y}^* - \hat{y}_t}{\hat{y}_t}\right] = \beta^* \log\left[1 + \frac{\hat{y}^*}{\hat{y}_t} - \frac{\hat{y}_t}{\hat{y}_t}\right] = \beta^* \log\left(\frac{\hat{y}^*}{\hat{y}_t}\right) = \qquad [25.A]$$
$$= \beta^* \left(\log \hat{y}^* - \log \hat{y}_t\right) = -\beta^* \left(\log \hat{y}_t - \log \hat{y}^*\right)$$

la resolución de esa ecuación da,

$$\log\left(\frac{\hat{y}_t}{\hat{y}_0}\right) = \left(1 - e^{-\beta^* t}\right)\log\left(\frac{\hat{y}^*}{\hat{y}_0}\right) \qquad [26.A]$$

La ecuación anterior muestra cuál es la dinámica de la renta en términos efectivos alrededor del estado estacionario. Teniendo en cuenta que la tecnología crece a una tasa g , $A_t = A_0 e^{gt}$, podemos expresar la ecuación [26.A] en términos de renta per cápita

$$\log\left(\frac{y_t}{y_0}\right) = gt + \left(1 - e^{-\beta^* t}\right)\log\left(\frac{\hat{y}^*}{\hat{y}_0}\right) \qquad [27.A]$$

Esta ecuación muestra la dinámica de la renta per cápita alrededor del estado estacionario. La ecuación [27.A] es una ecuación en tiempo continuo. Consideremos ahora una versión de la ecuación aplicada a períodos discretos de tiempo, aumentada para incluir una perturbación aleatoria (Barro y Sala-i-Martin, 1992):

$$\log(y_t) - \log(y_{t-1}) = g - \left(1 - e^{-\beta^*}\right)\left[\log(y_{t-1}) - \log(y^*_{t-1})\right] + \varepsilon_t \qquad [28.A]$$

Esta ecuación nos muestra la evolución de la renta per cápita en tiempo discreto alrededor del estado estacionario. La tasa de crecimiento en tiempo discreto $\Delta \log(y_{t-1})$ depende de la distancia que separa a la economía de su estado estacionario

Bajo los supuestos del modelo neoclásico $\beta^* > 0$, lo que implica convergencia hacia el estado estacionario. Esto es así porque si $\beta^* > 0$ entonces $\left(1 - e^{-\beta^*}\right)$ es siempre un número positivo, por lo que la tasa de crecimiento será positiva si la renta de la economía está por debajo de la del estado estacionario, y negativa si la renta de la economía es superior a la del estado estacionario. En cuanto a la magnitud de la tasa de crecimiento depende de la distancia al estado estacionario, $\left[\log\left(y_{t-1}\right) - \log\left(y_{t-1}^*\right)\right]$, a mayor distancia mayor magnitud.

Si llamamos $\lambda = -\left(1 - e^{-\beta^*}\right)$, la ecuación [28.A] se puede expresar como,

$$\Delta \log\left(y_{t-1}\right) = g + \lambda\left[\log\left(y_{t-1}\right) - \log\left(y_{t-1}^*\right)\right] + \varepsilon_t \qquad [29.A]$$

La ecuación [29.A] muestra que, bajo los supuestos del modelo neoclásico, la tasa de crecimiento de la renta per cápita alrededor del estado estacionario se puede modelizar mediante un modelo de corrección del error lineal, donde λ es la velocidad de ajuste al equilibrio de largo plazo.

A.4. Contraste de la hipótesis de convergencia para economías próximas al estado estacionario

Para determinar si el modelo neoclásico se cumple para una determinada economía y ésta converge realmente hacia su estado estacionario, bastaría con estimar la ecuación [29.A] y contrastar la hipótesis nula de no convergencia, $\lambda = 0$ contra la alternativa de convergencia, $\lambda < 0$. El problema es que esta ecuación no se puede estimar porque la renta del estado estacionario normalmente no se conoce. A pesar de ello, si consideramos dos economías próximas a su estado estacionario es posible formular un contraste de convergencia, si ambas economías son idénticas o difieren únicamente en la tasa de ahorro.

A.4.1. Economías con el mismo estado estacionario

Consideremos dos economías, i, j, idénticas, por lo que el estado estacionario es el mismo para ambas. En ese caso, bajo los supuestos del modelo neoclásico, la ecuación [38.A] se verificaría para las dos economías,

$$\Delta \log\left(y_{i,t-1}\right) = \lambda\left[\log\left(y_{i,t-1}\right) - \log\left(y_{t-1}^*\right)\right] + \varepsilon_{i,t} \qquad [30.A]$$

$$\Delta \log\left(y_{j,t-1}\right) = \lambda\left[\log\left(y_{j,t-1}\right) - \log\left(y_{t-1}^{*}\right)\right] + \varepsilon_{j,t} \qquad [31.A]$$

donde y_i es la renta per cápita de la economía i, e y_j es la renta per cápita de la economía j. Restando ambas ecuaciones,

$$\Delta \log\left(y_{i,t-1}\right) - \Delta \log\left(y_{j,t-1}\right) = \lambda\left[\log\left(y_{i,t-1}\right) - \log\left(y_{j,t-1}\right)\right] + \xi_t \qquad [32.A]$$

donde $\xi_t = \varepsilon_{i,t} - \varepsilon_{j,t}$, es un proceso estocástico de media nula. Si definimos la variable: $y_{j,t-1}^{i} = \log\left(y_{i,t-1}\right) - \log\left(y_{j,t-1}\right)$, entonces $\Delta \log\left(y_{i,t-1}\right) - \Delta \log\left(y_{j,t-1}\right) = y_{j,t}^{i} - y_{j,t-1}^{i} = \Delta y_{j,t-1}^{i}$, y la ecuación [32.A] se puede escribir como,

$$\Delta y_{j,t-1}^{i} = \lambda y_{j,t-1}^{i} + \xi_t \qquad [33.A]$$

Esta es una ecuación de Dickey Fuller sin constante y sin tendencia, y el contraste relevante para determinar si $\lambda < 0$ es un contraste de raíz unitaria de Dickey Fuller (1979). Este contraste considera bajo la hipótesis nula ausencia de convergencia, $\lambda = 0$, y bajo la alternativa convergencia, $\lambda < 0$. Si se rechaza la hipótesis nula de raíz unitaria, implica que se verifica el modelo neoclásico y que ambas economías convergen hacia su propio estado estacionario. Además, dado que el estado estacionario es el mismo, la hipótesis de convergencia implica también que las series de renta de ambas economías están convergiendo entre sí. De este modo el contraste del modelo neoclásico de crecimiento se convierte también en un contraste de convergencia en renta entre dos economías.

Si las perturbaciones de la ecuación [33.A] presentan autocorrelación serial, podemos extender dicha ecuación del siguiente modo (Said y Dickey, 1984),

$$\Delta y_{j,t-1}^{i} = \lambda y_{j,t-1}^{i} + \sum_{l=1}^{p} \Delta y_{j,t-1}^{i} + \eta_t \qquad [34.A]$$

donde *p* es el número de retardos necesarios para que η_t sea un ruido blanco. Esta es la ecuación de Dickey Fuller Aumentada para tener en cuenta la posible correlación serial. Al igual que en la ecuación [42.A] el contraste relevante para determinar convergencia es un contraste de raíz unitaria lineal.

A.4.1. Economías con diferente estado estacionario

Consideremos ahora dos economías que no tienen el mismo estado estacionario, pero que difieren entre sí únicamente en la tasa de ahorro. En este caso aún es posible llevar a cabo el contraste de convergencia porque λ es la misma para las dos economías[18]. Las ecuaciones relevantes para cada economía son:

$$\Delta \log\left(y_{i,t-1}\right) = \lambda\left[\log\left(y_{i,t-1}\right) - \log\left(y^{*}_{i,t-1}\right)\right] + \varepsilon_{i,t} \quad [35.A]$$

$$\Delta \log\left(y_{j,t-1}\right) = \lambda\left[\log\left(y_{j,t-1}\right) - \log\left(y^{*}_{j,t-1}\right)\right] + \varepsilon_{j,t} \quad [36.A]$$

donde y_i^* es la renta per cápita de la economía i en el estado estacionario e y_j^* la de la economía j. Restando ambas ecuaciones,

$$\Delta \log\left(y_{i,t-1}\right) - \Delta \log\left(y_{j,t-1}\right) = \lambda\left[\log\left(y_{i,t-1}\right) - \log\left(y_{j,t-1}\right)\right] + \lambda\left[\log\left(y^{*}_{i,t-1}\right) - \log\left(y^{*}_{j,t-1}\right)\right] + \xi_t \quad [37.A]$$

donde $\xi_t = \varepsilon_{i,t} - \varepsilon_{j,t}$, es un proceso estocástico de media nula. Dado que en el estado estacionario todas las economías crecen a una misma tasa g, el diferencial de renta del estado estacionario entre ambas economías es constante en el tiempo, $k^* = \log\left(y^{*}_{i,t-1}\right) - \log\left(y^{*}_{j,t-1}\right)$, por lo que la ecuación [37.A] se puede expresar del siguiente modo,

$$\Delta y^{i}_{j,t-1} = \alpha + \lambda y^{i}_{j,t-1} + \xi_t \quad [38.A]$$

donde $\alpha = \lambda k^*$, y $y^{i}_{j,t-1} = \log\left(y_{i,t-1}\right) - \log\left(y_{j,t-1}\right)$. Esta es la ecuación de Dickey Fuller con constante. Como comentamos anteriormente, el contraste de convergencia es el contraste de raíz unitaria de Dickey Fuller (1979). Si se rechaza la hipótesis nula se verifica el modelo de

[18] Dado que la velocidad de convergencia en el estado estacionario no depende de la tasa de ahorro, ésta es la misma para las dos economías.

crecimiento neoclásico, lo que significa que ambas economías convergen hacia su propio estado estacionario. Ahora bien, el estado estacionario de las economías no es el mismo, por lo que no habrá convergencia entre los niveles de renta de ambas. A largo plazo el diferencial de renta entre ambas convergerá al diferencial de renta del estado estacionario, k^*.

Si ξ_t presenta autocorrelación serial la ecuación relevante para el contraste de raíz unitaria es la de Dickey Fuller Aumentada,

$$\Delta y^i_{j,t-1} = \alpha + \lambda y^i_{j,t-1} + \sum_{l=1}^{p} \Delta y^i_{j,t-1} + \eta_t \qquad [39.A]$$

donde p es el número de retardos necesarios para que η_t sea un ruido blanco.

Bibliografía

Barro, R. J. y Sala-i-Martin (1992): "Convergence", *Journal of Political Economy*, 100, 2, págs. 223-251.

Davies, R.B. (1987): "Hypothesis testing when a nuisance parameter is present under the alternative", *Biometrika*, 74, págs. 33-43.

Dickey, D.A. y Fuller, W. (1979): "Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root", *Journal of the American Statistical Association,*, 74, págs. 427-431.

Dickey, D.A. y Fuller, W. (1981): "Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root", *Econometrica*, 49, págs. 1057-1072.

Kapetanios, G., Shin, Y. y Snell, A. (2003): "Testing for a unit root in the nonlinear STAR framework", *Journal of Econometrics*, 112, págs. 359-379.

MacKinnon, J.G. (1991): "Critical values for cointegration tests" en Long-run economic relationships: readings in cointegration, R.F. Engle y C.W.J. Granger editores, Oxford University Press.

Ng, S. y Perron, P. (1995): "Unit root tests in ARMA models with data-dependent methods for the selection of the truncation lag", *Journal of the American Statistical Association*, 90, págs. 268-281.

Perron, P. (1989): "The great crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis", *Econometrica*, 57, págs. 1361-1401.

Sala-i-Martin, X. (2000): Apuntes de crecimiento económico, Antoni Bosch, editor, S.A., Barcelona.

Said, S.E. y Dickey, D.A. (1984): "Testing for unit roots in autoregressive moving average models of unknown order". *Biometrika*, 71, págs. 599-607.

Solow, R.M. (1956): "A contribution to the theory of economic growth", *Quarterly Journal of Economics*, 70, págs. 65-94.

Swan, T. (1956): "Economic growth and capital accumulation", *Economic Record*, 32, págs. 334-361.